

**SVEUČILIŠTE U SPLITU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I
BRODOGRADNJE**

POSLIJEDIPLOMSKI DOKTORSKI STUDIJ STROJARSTVA

KVALIFIKACIJSKI ISPIT

**STRUKTURNA ANALIZA TANKOSTJENOG
ZAKRIVLJENOG ŠTAPA**

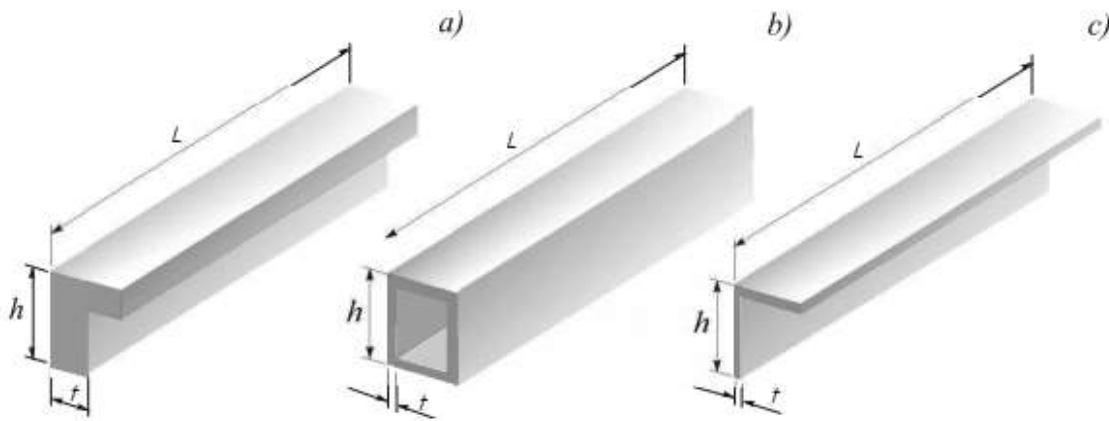
Dražen Kustura

Split, rujan 2021.

1. UVOD	1
2. ANALIZA RAVNIH ŠTAPOVA.....	5
2.1. Savijanje ravnih štapova.....	5
2.1.1. Euler Bernoullijeva teorija	5
2.1.2. Timoškova teorija	8
2.2. Uvijanje ravnih štapova.....	11
2.2.1. Saint – Venantova teorija.....	12
2.2.2. Čisto i ograničeno uvijanje ravnih štapova.....	12
3. ANALIZA RAVNIH TANKOSTJENIH ŠTAPOVA OTVORENOG POPREČNOG PRESJEKA.....	15
4. SAVIJANJE DEBELOSTJENOG ZAKRIVLJENOG ŠTAPA.....	27
5. ANALIZA TANKOSTJENIH ZAKRIVLJENIH ŠTAPOVA TEMELJENA NA IZRAZIMA ZA RAVNE ŠTAPOVE.....	31
6. ANALIZA TANKOSTJENIH ZAKRIVLJENIH ŠTAPOVA TEMELJENA NA JEDNADŽBAMA TEORIJE ELASTIČNOSTI.....	40
6.1. Analiza tankostjenih zakrivljenih štapova proizvoljnog oblika poprečnog presjeka.....	40
6.2. Analiza tankostjenog uzdužno zakrivljenog I profila.....	49
7. ZAKLJUČAK.....	59
LITERATURA	
SAŽETAK	

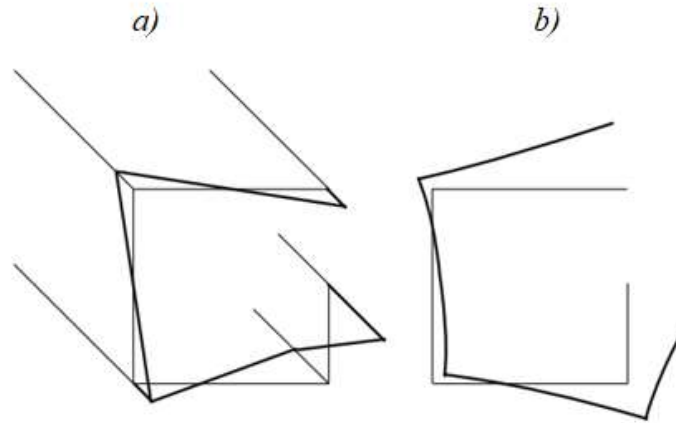
1. UVOD

Štap je čvrsto deformabilno tijelo u kojem je najveća dimenzija poprečnog presjeka mnogo manja od duljine štapa L . Uzdužna os štapa može biti ravna (pravocrtna), kao što je pokazano na slici 1.1, ili krivocrtna; a poprečni presjeka štapa može biti: pun (slika 1.1.a), tankostjen zatvoren (slika 1.1.b) ili tankostjen otvoren (slika 1.1.c). Kod punog poprečnog presjeka su dimenzije presjeka t i h približno jednake. Kod tankostjenog poprečnog presjeka je debljina stijenke t mnogo manja od ostalih dimenzija presjeka te približno vrijedi $h \geq 10t$. Presjek je zatvoren ako je kontura presjeka zatvorena, dok je kod otvorenog presjeka kontura otvorena. Tankostjeni ravni štapovi otvorenog poprečnog presjeka se uslijed djelovanja opterećenja ponašaju različito, kako od štapova punog poprečnog presjeka tako i od štapova tankostjenog zatvorenog poprečnog presjeka [1, 2], a što je opisano u sljedećem poglavlju.



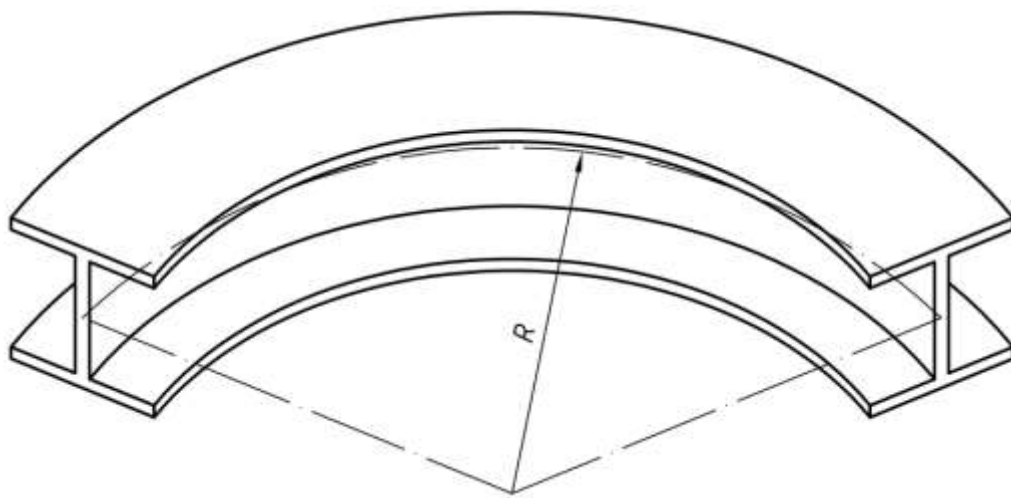
Slika 1.1. Ravni štap: a) punog poprečnog presjeka; b) zatvorenog tankostjenog poprečnog presjeka; c) otvorenog tankostjenog poprečnog presjeka [1]

Distorzija (engl. *distortion*) i izvitoperenje (engl. *warping*) su promjene poprečnog presjeka koje mogu nastati uslijed djelovanja opterećenja na štap. Izvitoperenje je „promjena ravnosti“ poprečnog presjeka uslijed nejednolikih uzdužnih pomaka (engl. *out of plane displacements*), slika 1.2.a. Distorzija je promjena oblika uzdužne projekcije poprečnog presjeka i posljedica je nejednolikih pomaka u ravnini presjeka (engl. *in plane displacements*), slika 1.2.b.



Slika 1.2. Promjene poprečnog presjeka: a) izvitoperenje; b) distorzija [3]

U nastavku teksta se pod pojmom zakrivljenog štapa, to jest lučnog nosača, podrazumijeva da uzdužna os štapa ima oblik kružnog luka. Pod pojmom krivocrtnog štapa se podrazumijeva da je uzdužna os štapa proizvoljnog oblika. Na slici 1.3 je prikazan tankostjeni zakrivljeni štap otvorenog poprečnog presjeka, gdje R predstavlja polumjer zakrivljenosti težišne linije. Zakrivljeni tankostjeni štapovi se koriste u mnogim granama inženjerstva zbog relativno jednostavne proizvodnje te povoljnog odnosa čvrstoće i mase [4]. Zakrivljeni se štapovi uslijed djelovanja opterećenja ponašaju različito od ravnih štapova, a što je posljedica početne zakrivljenosti uzdužne osi i što je opisano u zadnja tri poglavlja ovog rada.



Slika 1.3. Tankostjeni zakrivljeni štap otvorenog poprečnog presjeka

Teorija elastičnosti se bavi određivanjem naprezanja, deformacija i pomaka u čvrstom tijelu, a koji su uzrokovani djelovanjem opterećenja. Temeljne jednačbe teorije elastičnosti se mogu podijeliti u tri kategorije:

1. diferencijalne jednačbe ravnoteže (Navierove jednačbe),
2. veza deformacija i pomaka (Cauchyjeve jednačbe),
3. veza naprezanja i deformacija (Hookeov zakon).

Rješenja temeljnih jednačbi teorije elastičnosti moraju zadovoljiti uvjete kompatibilnosti (Saint – Venantovi uvjeti) [5, 6]. Zakrivljeni štapovi pravokutnog poprečnog presjeka su analizirani primjenom jednačbi teorije elastičnosti u polarnom koordinatnom sustavu u [7 – 10]. U [7] je analizirano čisto savijanje, a u [8] utjecaj proizvoljno usmjerene sile na slobodnom kraju izotropnog štapa. U [9] je analiziran utjecaj momenta savijanja i poprečne sile koji djeluju na slobodnom kraju zakrivljenog ortotropnog štapa. U [10] je analiziran prsten opterećen s dvije kolinearne sile koje djeluju po obodu prstena i koje su usmjerene prema središtu prstena.

Temeljne jednačbe teorije elastičnosti se mogu pojednostavniti uz pomoć pretpostavki, a koje se prihvaćaju bez matematičkog dokaza i rezultat su mnogobrojnih pokusa i opažanja. Na primjer, Leonardo da Vinci je uočio da su deformirani poprečni presjeci štapa opterećenog na čisto savijanje ravni i okomiti na os štapa [11], dok je Coulomb uočio da je deformirani poprečni presjek žice opterećene na čisto uvijanje ravan [12]. U ovom pojednostavljenom opisu problema se većina istraživanja tankostjenih zakrivljenih štapova odnosi na numeričke metode rješavanja temeljnih jednačbi [13 – 20].

Linijski konačni elementi su korišteni u analizi tankostjenog zakrivljenog štapa u [13 – 16]. U [13, 14] je kutna deformacija srednje plohe jednaka nuli, dok je u [15, 16] ona uzeta u obzir. Tankostjeni kompozitni zakrivljeni štapovi su analizirani u [15, 16].

Izogeometrijska analiza (engl. *isogeometric analysis*) je korištena u analizi zakrivljenih [17, 18] i krivocrtnih [19, 20] štapova. Tankostjeni poprečni presjeci su analizirani u [17, 20], a pravokutni poprečni presjeci u [18, 19]. Distorzija i izvitoperenje tankostjenog poprečnog presjeka s utjecajem smicanja je analizirana u [17], a izvitoperenje bez utjecaja smicanja u [20].

Poopćena teorija štapova (engl. *generalised beam theory*) je korištena u analizi zakrivljenih štapova tankostjenog poprečnog presjeka s dvije osi simetrije [21, 22] i s jednom osi simetrije [21, 23]. Carrerina objedinjena formulacija (engl. *Carrera's unified formulation*) za ravne štapove [24, 25] je također korištena u analizi zakrivljenih štapova [26].

Rješenja pojednostavljenih jednadžbi teorije elastičnosti je moguće odrediti analitički kao funkcije geometrije, materijala te rubnih uvjeta i opterećenja štapa. U nastavku teksta je dan pregled analitičkih metoda korištenih u analizi ravnih i zakrivljenih štapova, s naglaskom na otvorene tankostjene poprečne presjeke.

2. ANALIZA RAVNIH ŠTAPOVA

2.1. Savijanje ravnih štapova

Klasične teorije savijanja ravnih štapova (Euler – Bernoullijeva i Timošenkova teorija) se temelje na pretpostavci da je deformirani poprečni presjek ravan [11]. Kod relativno kratkih ravnih štapova je znatan utjecaj smicanja pa Timošenko nadopunjuje Euler - Bernoullijevu teoriju savijanja uzimajući u obzir kutne deformacije. Kako se u Timošenkovoj teoriji pretpostavlja jednolika raspodjela kutne deformacije po visini poprečnog presjeka, deformirani poprečni presjeci su i dalje ravni, ali nisu više okomiti na neutralnu plohu [27, 28].

2.1.1. Euler – Bernoullijeva teorija

Euler – Bernoullijeva teorija savijanja ravnog štapa se temelji na sljedećim pretpostavkama:

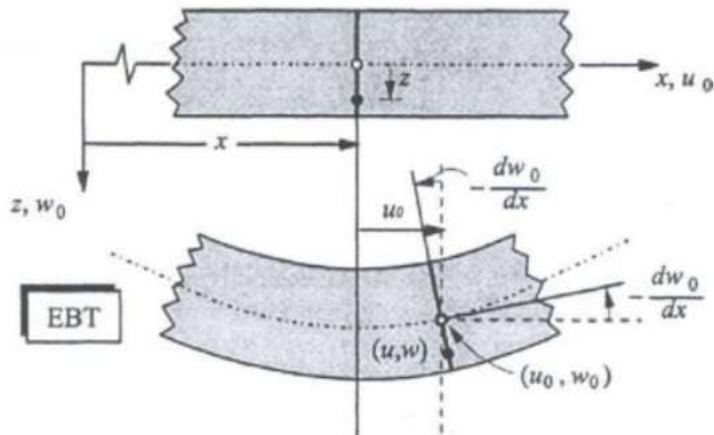
1. nema deformacija u ravnini poprečnog presjeka,
2. poprečni presjek se tijekom deformiranja zakreće oko neutralne linije i ostaje ravan,
3. deformirani poprečni presjek je okomit na neutralnu plohu [25, 29].

Neutralnu plohu tvore uzdužna vlakna štapa koja ne mijenjaju svoju duljinu uslijed savijanja. Neutralnu liniju tvori presjek neutralne plohe i ravnine koja je okomita na uzdužnu os štapa [30, 31]. Desni pravokutni Kartezijev koordinatni sustav $Oxyz$, gdje os x predstavlja uzdužnu os štapa, je korišten u ovom poglavlju. Ishodište koordinatnog sustava se nalazi u težištu poprečnog presjeka štapa T . Na slici 2.1 je prikazan ravni štap deformiran u skladu s Euler – Bernoullijevim pretpostavkama.

Polje pomaka proizvoljne točke poprečnog presjeka je tada definirano kao

$$\begin{aligned}u(x, z) &= -z \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} \\w(x, z) &= w_0(x)\end{aligned}\tag{2.1}$$

gdje u i w predstavljaju redom pomake proizvoljne točke poprečnog presjeka u smjeru osi x i z , a w_0 je pomak težišta poprečnog presjeka u smjeru osi z .



Slika 2.1. Štap deformiran u skladu s pretpostavkama Euler – Bernoullijeve teorije [29]

Duljinska deformacija proizvoljne točke poprečnog presjeka ε_x , tada glasi

$$\varepsilon_x(x, z) = \frac{\partial u(x, z)}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w_0(x)}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

Uzdugo normalno naprezanje σ_x , slijedi iz prethodnog izraza primjenom Hookeovog zakona

$$\sigma_x = E \varepsilon_x(x, z) = -z \frac{\partial^2 w_0(x)}{\partial x^2} E \quad (2.3)$$

gdje je E modul elastičnosti. Moment savijanja oko y osi M_y , je definiran kao

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA = -EI_y \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \quad (2.4)$$

gdje je EI_y savojna krutost štapa oko y osi, a I_y aksijalni moment tromosti poprečnog presjeka štapa u odnosu na os y .

Jednadžbe ravnoteže štapa se mogu odrediti primjenom energijskih metoda ili vektorske mehanike. Jednadžbe ravnoteže u vektorskoj mehanici slijede analizom odsječka štapa primjenom uvjeta ravnoteže, a što je prikazano u sljedećim poglavljima. Energijski principi, npr. princip virtualnog rada, se koriste u energijskim metodama za određivanje uvjeta ravnoteže štapa i što je prikazano u nastavku ovog poglavlja.

Virtualni rad δW , je rad stvarnih sila na virtualnim pomacima, gdje je virtualni pomak malen, proizvoljan i ne utječe na rubne uvjete. Ako je štap u ravnoteži, virtualni rad je jednak nuli te se može iskazati kao

$$\delta W = \delta U + \delta V = 0 \quad (2.5)$$

gdje je δV virtualna potencijalna energija opterećenja štapa, a δU virtualna potencijalna energija deformiranosti; koja je prema Euler – Bernoullijevoj teoriji definirana kao

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L \int_A \sigma_x \delta \varepsilon_x dA dx = \int_0^L \int_A \sigma_x \left(-z \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} \right) dA dx \\ &= - \int_0^L M_y \frac{d^2 \delta w_0}{dx^2} dx \end{aligned} \quad (2.6)$$

gdje su: L duljina štapa, A površina poprečnog presjeka, δ operator varijacije i δw_0 virtualni pomak. Uz ograničenje da raspodijeljeno poprečno opterećenje $q_z(x)$ djeluje u smjeru osi z te da je ono jedino opterećenje koje djeluje na štap, virtualna potencijalna energija opterećenja je definirana kao

$$\delta V = - \int_0^L q_z \delta w_0 dx \quad (2.7)$$

Virtualni rad se sada može izraziti kao

$$\delta W = - \int_0^L \left(M_y \frac{d^2 \delta w_0}{dx^2} + q_z \delta w_0 \right) dx = 0 \quad (2.8)$$

Prethodni izraz primjenom teorema o parcijalnoj integraciji prelazi u

$$- \int_0^L \left(\frac{d^2 M_y}{dx^2} + q_z \right) \delta w_0 dx + \left(M_y \frac{d \delta w_0}{dx} - \frac{d M_y}{dx} \delta w_0 \right) \Big|_0^L = 0 \quad (2.9)$$

Uvjet ravnoteže, nakon grupiranja članova koji sadrže virtualni pomak δw_0 u prethodnom izrazu, glasi

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = -q_z(x) \quad (2.10)$$

te se primjenom izraza (2.4) dobiva temeljna jednadžba Euler – Bernoullijeve teorije [29]

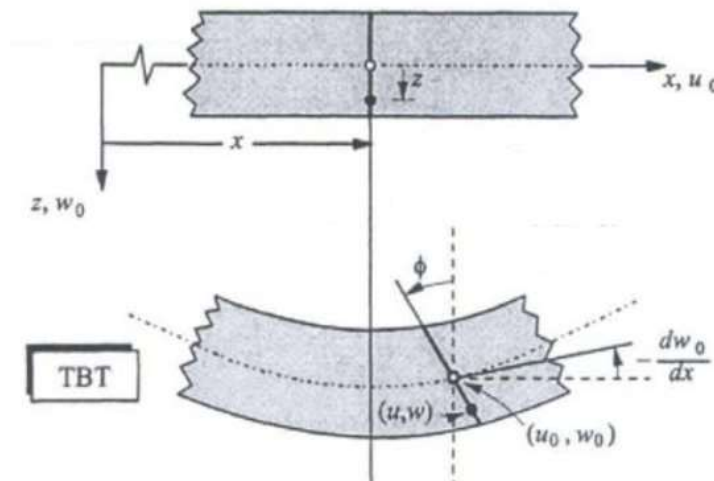
$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E I_y \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) = q_z(x) \quad (2.11)$$

2.1.2. Timošenkova teorija

Timošenkova teorija savijanja ravnog štapa se temelji na sljedećim pretpostavkama:

1. poprečni presjek je krut u svojoj ravnini,
2. deformirani poprečni presjek je ravan,
3. raspodjela kutnih deformacija po visini poprečnog presjeka je jednolika [25, 29].

Na slici 2.2 je prikaz štap deformiran u skladu s danim pretpostavkama.



Slika 2.2. Štap deformiran u skladu s pretpostavkama Timošenkove teorije [29]

Polje pomaka prema Timošenku je definirano kao

$$\begin{aligned} u(x, z) &= z\theta_y(x) \\ w(x, z) &= w_0(x) \end{aligned} \quad (2.12)$$

gdje je θ_y nepoznata funkcija koja predstavlja zakret poprečnog presjeka oko neutralne linije i koju je potrebno odrediti. Mjere deformacije su

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x, z) &= \frac{\partial u(x, z)}{\partial x} = \frac{\partial \theta_y(x)}{\partial x} z \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_y \end{aligned} \quad (2.13)$$

gdje je γ_{xz} kutna deformacija. Mjere naprezanja su definirane kao

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E\varepsilon_x(x, z) = z \frac{\partial \theta_y(x)}{\partial x} E \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = G \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_y \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

gdje su G modul smicanja i τ_{xz} posmično naprezanje. Moment savijanja oko osi y je definiran kao

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA = EI_y \theta_y \quad (2.15)$$

dok je poprečna sila u smjeru z osi Q_z , definirana kao

$$Q_z = \int_A \tau_{xz} dA = k_s GA \left(\frac{dw_0}{dx} + \theta_y \right) \quad (2.16)$$

gdje je k_s korekcijski faktor smicanja.

Prema ovoj teoriji, deformirani poprečni presjek nije više okomit na neutralnu plohu te zbog toga zakret poprečnog presjeka oko neutralne linije nije proporcionalan derivaciji progiba. Kako je pretpostavljena raspodjela kutnih deformacija po poprečnom presjeku jednolika, slijedi i da je raspodjela posmičnih naprezanja također jednolika, te se uvodi korekcijski faktor smicanja definiran kao omjer maksimalnog i srednjeg posmičnog naprezanja u poprečnom presjeku. Pretpostavljena raspodjela posmičnih naprezanja po visini poprečnog presjeka ne odgovara stvarnom stanju naprezanja tijela. Naime, stvarna raspodjela posmičnih naprezanja je nejednoliko raspodijeljena po visini poprečnog presjeka, a na rubovima poprečnog presjeka je jednaka nuli.

Korekcijski faktor smicanja smanjuje utjecaj jednolike raspodjele posmičnih naprezanja, ali ne uzima u obzir da su posmična naprezanja na rubu jednaka nuli [27, 28].

Za isti slučaj opterećenja kao u Euler – Bernoullijevoj teoriji, virtualna potencijalna energija opterećenja je definirana kao

$$\delta V = - \int_0^L q_z \delta w_0 dx \quad (2.17)$$

dok virtualna potencijalna energija deformiranosti sada glasi

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dx \\ &= \int_0^L \int_A \left(\sigma_x z \left(\frac{\partial \delta \theta_y}{\partial x} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \delta \theta_y \right) \right) dA dx \quad (2.18) \\ &= \int_0^L \left(M_y \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial x} + Q_z \left(\frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \delta \theta_y \right) \right) dx \end{aligned}$$

Princip virtualnog rada se može iskazati kao

$$\delta W = \int_0^L \left(M_y \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial x} + Q_z \left(\frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \delta \theta_y \right) - q_z \delta w_0 \right) dx = 0 \quad (2.19)$$

te prethodni izraz, primjenom teorema o parcijalnoj integraciji, postaje

$$\begin{aligned} \int_0^L \left[\left(-\frac{dM_y}{dx} + Q_z \right) \delta \theta_y - \left(-\frac{dQ_z}{dx} - q_z \right) \delta w_0 \right] dx \\ + (M_y \delta \theta + Q_z \delta w_0) \Big|_0^L = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Grupiranjem članova uz virtualne pomake $(\delta\theta_y, \delta w_0)$, iz prethodnog izraza slijede uvjeti ravnoteže

$$\begin{aligned} -\frac{dM_y}{dx} + Q_z &= 0 \\ -\frac{dQ_z}{dx} - q_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

a iz izraza (2.15) i (2.16) slijede temeljne jednadžbe Timošenkove teorije [29]

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d\theta_y}{dx} \right) + k_s GA \left(\frac{dw_0}{dx} + \theta_y \right) &= 0 \\ -\frac{d}{dx} \left(k_s GA \left(\frac{dw_0}{dx} + \theta_y \right) \right) - q_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Usporedbom izraza za virtualnu potencijalnu energiju deformiranosti, Timošenkove i Euler – Bernoullijeve teorije, može se vidjeti razlika u dodatnom članu u izrazu (2.18), a koji se odnosi na kutnu deformaciju γ_{xz} , odnosno na posmično naprežanje τ_{xz} . Kako su izrazi za virtualnu potencijalnu energiju opterećenja u ovim teorijama jednaki, komponenta pomaka w_0 će u Timošenkovoj teoriji biti manja nego analogna komponenta pomaka u Euler – Bernoullijevoj teoriji. Korekcijski faktor smicanja ovisi o: geometriji štapa, opterećenju, materijalu, i rubnim uvjetima [29], te postoje razne metode njegovog određivanja [27]. Ako vrijedi

$$k_s = 0 \quad (2.23)$$

tada izrazi ove teorije prelaze u izraze Euler – Bernoullijeve teorije.

2.2. Uvijanje ravnih štapova

Coulomb je pri analizi uvijanja tanke ravne žice pretpostavio da su deformirani poprečni presjeci ravni (nema izvitoperenja) te da se poprečni presjeci tijekom deformiranja zakreću kao krute figure. Ova se teorija smatra ispravnom pri analizi uvijanja ravnih štapova konstantnog kružnog oblika poprečnog presjeka [12, 27].

2.2.1. Saint – Venantova teorija

Prilikom uvijanja ravnih štapova neokruglog poprečnog presjeka dolazi do izvitoperenja poprečnog presjeka, to jest točke poprečnog presjeka se osim zakretanja oko uzdužne osi i pomiču u uzdužnom smjeru. Saint – Venantova teorija uvijanja predstavlja poboljšanje Coulombove teorije, a počiva na pretpostavci da nema promjene oblika uzdužne projekcije deformiranog poprečnog presjeka, unatoč postojanju izvitoperenja poprečnog presjeka i zakreta poprečnog presjeka oko osi uvijanja. Os uvijanja je paralelna uzdužnoj osi štapa i sastoji se od točaka koje, uslijed djelovanja opterećenja, nemaju komponentu pomaka u smjeru okomitom na os uvijanja.

Uzdužni pomak proizvoljne točke poprečnog presjeka štapa u , je tada definiran kao

$$u = \theta \cdot \psi(y, z) \quad (2.24)$$

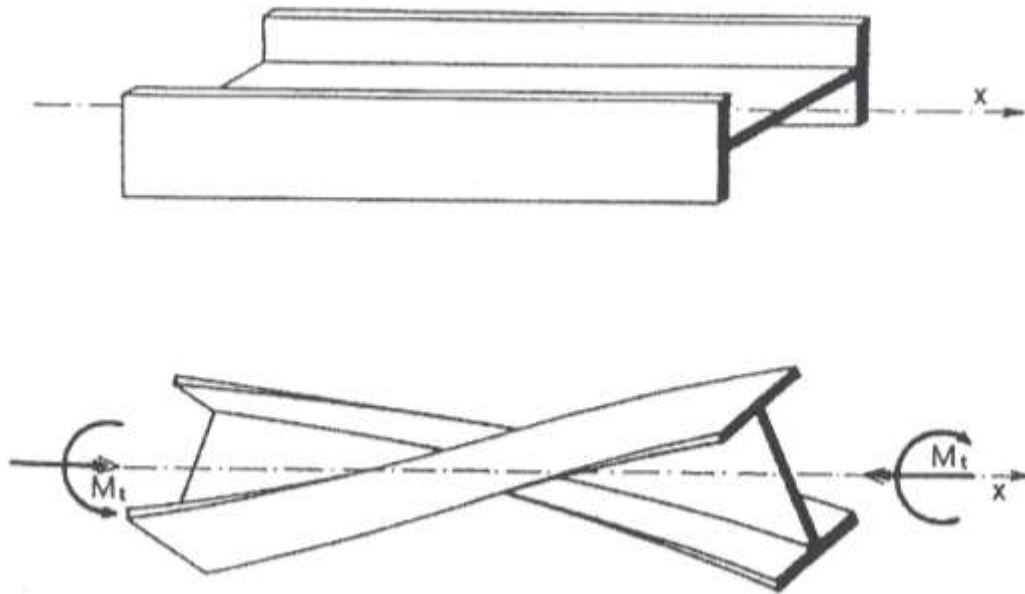
gdje je θ relativni kut uvijanja štapa, a $\psi(y, z)$ funkcija izvitoperenja poprečnog presjeka koja ovisi o obliku poprečnog presjeka. Prilikom uvijanja ravnih štapova kružnog poprečnog presjeka nema izvitoperenja poprečnog presjeka te vrijedi

$$\psi = 0 \quad (2.27)$$

Primjena Saint – Venantove teorije je ograničena na čisto uvijanje štapa ($\theta = konst.$) gdje je izvitoperenje poprečnog presjeka slobodno [12].

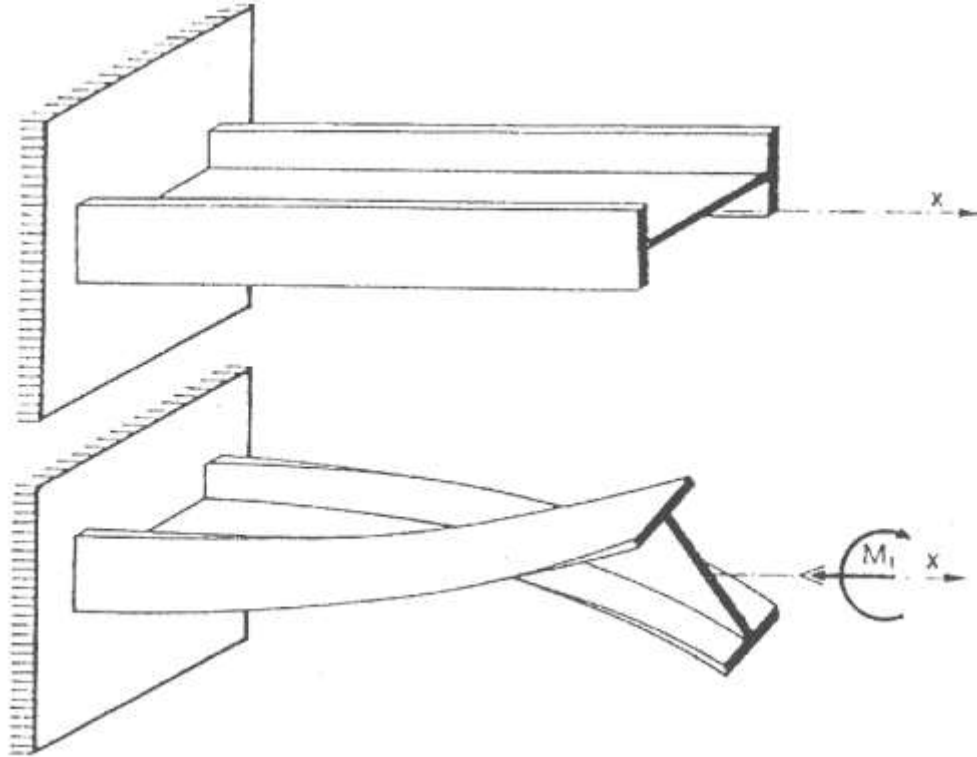
2.2.2. Čisto i ograničeno uvijanje ravnih štapova

Ako se svi poprečni presjeci ravnog štapa opterećenog na uvijanje nalaze pod jednakim uvjetima i ako se mogu slobodno deformirati, to jest ako je izvitoperenje svih poprečnih presjeka slobodno, tada nema promjene udaljenosti između poprečnih presjeka i nema normalnih naprezanja u poprečnim presjecima. Raspodjela posmičnih naprezanja je tada jednaka u svim poprečnim presjecima. Ovaj slučaj uvijanja je prikazan na slici 2.3 te se naziva: čisto, slobodno ili jednoliko uvijanje.



Slika 2.3. Čisto uvijanje ravnog štapa [32]

Ako je ograničeno izvitoperenje (iskrivljenje ili deplanacija) jednog ili više poprečnih presjeka štapa, tada će izvitoperenja poprečnih presjeka duž ravnog štapa biti različita. Uslijed toga se razmaci između pojedinih točaka mijenjaju (vlakna štapa se produljuju ili skraćuju) te se u poprečnom presjeku pojavljuju normalna naprezanja promjenjiva kako po duljini štapa tako i po visini poprečnog presjeka. Ovaj slučaj uvijanja je prikazan na slici 2.4 i naziva se ograničeno ili nejednoliko uvijanje, to jest uvijanje sa savijanjem [32]. Izvitoperenje poprečnog presjeka može biti ograničeno osloncima, djelovanjem vanjskog opterećenja, itd. Naime, nejednolika raspodjela unutarnjih momenata uvijanja također za posljedica ima različita izvitoperenja poprečnih presjeka štapa [33].

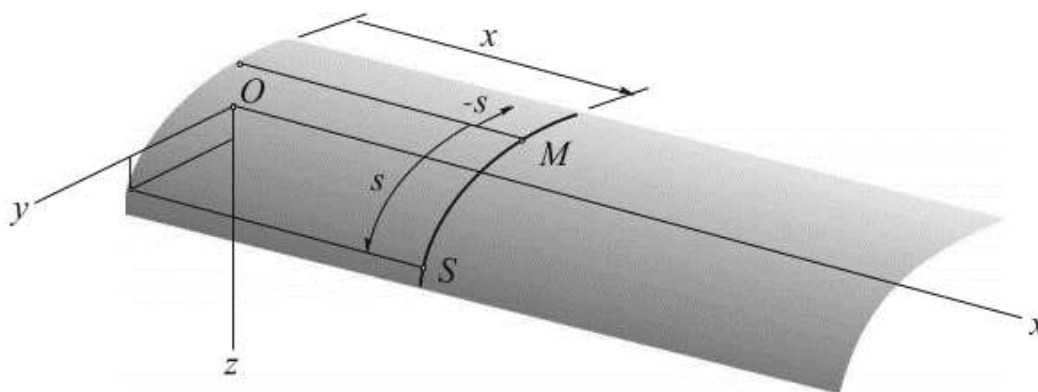


Slika 2.4. Ograničeno uvijanje ravnog štapa [32]

Kod ravnih štapova punog i tankostjenog zatvorenog poprečnog presjeka, ako su dimenzije presjeka male u usporedbi s duljinom štapa, ograničeno izvitoperenje poprečnog presjeka gotovo da nema utjecaja na deformacije uvijanja i normalna naprezanja. Zbog toga se u analizi ovih štapova mogu koristiti obične teorije savijanja i uvijanja. Kod tankostjenih ravnih štapova otvorenog poprečnog presjeka se utjecaj normalnih naprezanja, nastalih uslijed ograničenog izvitoperenja poprečnog presjeka, ne smije zanemariti te je potrebno koristiti složenije metode savijanja i uvijanja. Razlog više za primjenu složenijih metoda leži u činjenici da se krutost tankostjenih ravnih štapova otvorenog poprečnog presjeka značajno mijenja ovisno o osloncima, a koji su jedan od uzroka ograničenog izvitoperenja poprečnog presjeka [32, 33].

3. ANALIZA RAVNIH TANKOSTJENIH ŠTAPOVA OTVORENOG POPREČNOG PRESJEKA

Vlasov je proveo jedno od prvih istraživanja tankostjenih štapova [4] te je razvio teoriju savijanja i uvijanja ravnih tankostjenih štapova otvorenog poprečnog presjeka, a koja se temelji na jednadžbama teorije elastičnosti cilindričnih ljuski iskazanim pomoću sektorske koordinate [2]. Kako je debljina stijenke poprečnog presjeka mnogo manja od ostalih dimenzija poprečnog presjeka štapa, analiza tankostjenih štapova se može ograničiti na srednju plohu štapa. Srednja ploha je definirana kao skup svih točaka koje se nalaze na polovištu stijenke štapa te je prikazana na slici 3.1. Srednja linija je definirana kao presjek srednje plohe i ravnine koja je okomita na uzdužnu os štapa (os x desnog pravokutnog Kartezijevog koordinatnog sustava $Oxyz$) te je prikazana na slici 3.2 [1, 2].



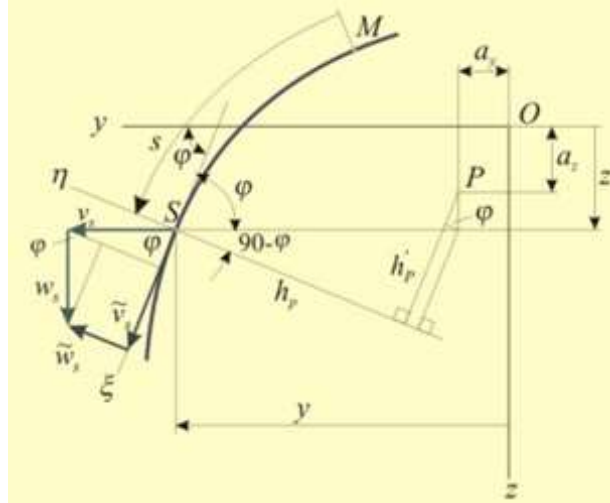
Slika 3.1. Srednja ploha tankostjenog štapa [1]

Položaj proizvoljne točke S srednje plohe se može iskazati pomoću tri pravokutne koordinate $S(x, y, z)$ ili pomoću dviju koordinata: $S(x, s)$ ili $S(x, \omega)$; gdje je s krivocrtna koordinata definirana u odnosu na ishodišnu točku M , a ω sektorska koordinata definirana kao

$$\omega = \int_0^s h_p ds \quad (3.1)$$

gdje je h_p udaljenost pola P od tangente ξ u točki S srednje linije poprečnog presjeka (slika 3.2).

Diferencijal sektorske koordinate $d\omega$ je pozitivan ako diferencijal krivocrtne koordinate ds zakreće oko pola P suprotno od smjera kazaljke na satu. Sektorska koordinata točke S može biti pozitivna, negativna ili jednaka nuli [1].



Slika 3.2. Srednja linija tankostjenog štapa i pomaci točke S u ravnini poprečnog presjeka [28]

Odnos između pravokutnih koordinata i okomice h_p slijedi iz slike 3.2 te glasi

$$h_p = (y - a_y) \sin \varphi - (z - a_z) \cos \varphi \quad (3.2)$$

gdje su $y(s)$ i $z(s)$ pravokutne koordinate u ravnini presjeka, a φ kut tangente ξ u točki S srednje linije poprečnog presjeka u odnosu na os y ; a_y i a_z su pravokutne koordinate pola P poprečnog presjeka. Pomak točke S srednje plohe u smjeru osi x je definiran kao $u_s = u_s(x, s)$; dok su pomaci u ravnini poprečnog presjeka definirani kao $\tilde{v}_s = \tilde{v}_s(x, \xi)$ i $\tilde{w}_s = \tilde{w}_s(x, \eta)$, gdje je ξ tangenta, a η normala na srednju liniju u točki S .

Teorija predložena u [2] se temelji na sljedećim pretpostavkama:

1. oblik poprečnog presjeka se ne mijenja tijekom deformiranja,
2. kutne deformacije u srednjoj plohi su jednake nuli,
3. normalna naprezanja su jednaka nuli, osim u smjeru izvodnice srednje plohe,
4. posmična naprezanja su jednaka nuli, osim u smjeru tangente na srednju liniju,
5. normalna naprezanja su raspodijeljena jednoliko po debljini stijenke,
6. posmična naprezanja su raspodijeljena linearno po debljini stijenke [1].

Zbog prve pretpostavke se distorzija poprečnog presjeka ne uzima u razmatranje, a zbog druge pretpostavke nema utjecaja kutnih deformacija srednje plohe na normalna naprezanja. Iako su kutne deformacije srednje plohe zanemarene, posmična naprezanja se ne mogu zanemariti i slijede iz uvjeta ravnoteže elementa stijenke, a što je opisano u nastavku poglavlja. Ove dvije pretpostavke predstavljaju klasične pretpostavke u analizi tankostjenih štapova otvorenog poprečnog presjeka. Treća pretpostavka je posljedica odnosa dimenzija poprečnog presjeka i duljine štapa, dok su ostale pretpostavke posljedice odnosa debljine stijenke poprečnog presjeka i ostalih dimenzija poprečnog presjeka [1, 32].

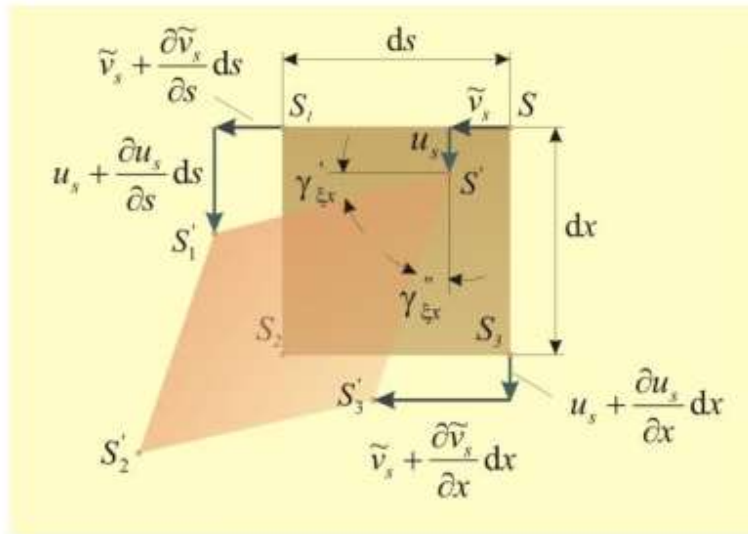
Kako se zbog prve pretpostavke srednja linija, to jest kontura poprečnog presjeka ne iskrivljuje u ravnini poprečnog presjeka, polje pomaka u ravnini poprečnog presjeka glasi

$$\begin{aligned}\tilde{v}_s &= v_P \cos \varphi + w_P \sin \varphi + h_P \alpha_P \\ \tilde{w}_s &= v_P \sin \varphi - w_P \cos \varphi - \frac{dh_P}{d\varphi} \alpha_P\end{aligned}\quad (3.3)$$

gdje su $v_P(x)$ i $w_P(x)$ redom pomaci pola P , odnosno srednje linije kao krute figure, u smjeru y i z osi, a $\alpha_P(x)$ je kut uvijanja srednje linije kao krute figure u odnosu na pol P .

Kutna deformacija srednje plohe $\gamma_{x\xi} = \gamma_{x\xi}(x, s)$, je prikazana na slici 3.3 i glasi

$$\gamma_{x\xi} = \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{v}_s}{\partial x}\quad (3.4)$$



Slika 3.3. Kutna deformacija srednje plohe [28]

Uzdužni pomak u_s slijedi direktnom integracijom prethodnog izraza te zbog druge pretpostavke ($\gamma_{x\xi} = 0$) glasi

$$u_s = u_M(x) - \int_0^s \frac{\partial \tilde{v}_s}{\partial x} dx \quad (3.5)$$

gdje je u_M pomak ishodišne točke M u smjeru osi x i odnosi se na translaciju poprečnog presjeka kao krute figure. Prethodni izraz se može zapisati kao

$$u_s = u_M - \frac{dv_P}{dx} y - \frac{dw_P}{dx} z - \frac{d\alpha_P}{dx} \omega \quad (3.6)$$

Prvi član prethodnog izraza predstavlja translaciju poprečnog presjeka, kao krute figure, u smjeru osi x . Drugi i treći član predstavljaju pomak proizvoljne točke srednje linije u smjeru osi x zbog zakreta poprečnog presjeka kao krute figure u odnosu na koordinatnu os z , odnosno y . Zadnji član se odnosi na izvitoperenje poprečnog presjeka [1]. Prethodni se izraz može zapisati kao

$$u_s = u_M - \gamma y + \beta z + \theta \omega \quad (3.7)$$

gdje su $\beta(x)$ i $\gamma(x)$ redom zakreti poprečnog presjeka, kao krute figure, oko y i z osi, a $\theta(x)$ je relativni kut uvijanja.

Duljinska deformacija ε_x , tada glasi

$$\varepsilon_x = \frac{du_s}{dx} = \frac{du_M}{dx} - \frac{d^2 v_P}{dx^2} y - \frac{d^2 w_P}{dx^2} z - \frac{d^2 \alpha_P}{dx^2} \omega \quad (3.8)$$

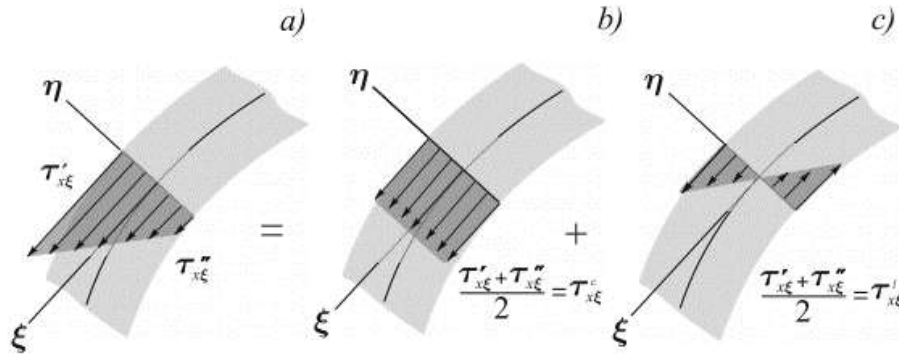
a normalno naprezanje u uzdužnom smjeru σ_x , slijedi primjenom Hookeovog zakona

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \left(\frac{du_M}{dx} - \frac{d^2 v_P}{dx^2} y - \frac{d^2 w_P}{dx^2} z - \frac{d^2 \alpha_P}{dx^2} \omega \right) \quad (3.9)$$

gdje je E modul elastičnosti.

Posmično naprezanje $\tau_{x\xi}$, je prema zadnjoj pretpostavci raspodijeljeno linearno po debljini stijenke (slika 3.4.a), a slijedi superpozicijom jednolike raspodjele $\tau_{x\xi}^c$ prikazane na slici 3.4.b i linearne raspodjele $\tau_{x\xi}^l$ koja je prikazana na slici 3.4.c. Maksimalna vrijednost linearne raspodjele posmičnog naprezanja je definirana kao

$$\tau_{x\xi}^l = \frac{M_t}{I_t} t \quad (3.10)$$



Slika 3.4. Raspodjela posmičnog naprezanja po debljini stijenke: a) ukupno posmično naprezanje $\tau_{x\xi}^c$; b) jednoliko posmično naprezanje $\tau_{x\xi}^l$; c) linearno posmično naprezanje $\tau_{x\xi}^l$ [1]

gdje je moment čistog uvijanja $M_t(x)$, definiran kao

$$M_t = GI_t \frac{d\alpha_p}{dx} = -GI_t \theta \quad (3.11)$$

pri čemu je G modul smicanja, a I_t torzijski moment tromosti ravnog tankostjenog štapa otvorenog poprečnog presjeka koji je definiran kao

$$I_t = \frac{1}{3} \sum_i s_i t_i \quad (3.12)$$

gdje je s_i duljina i -tog isječka tankostjenog poprečnog presjeka debljine stijenke t_i .

Izrazi (3.10.) – (3.12) samo formalno predstavljaju čisto uvijanje zato što su prema ovoj teoriji moment uvijanja $M_t(x)$ i relativni kut uvijanja $\theta(x)$ funkcije x koordinate, a što nije slučaj u Saint – Venantovoj teoriji.

Jednoliko posmično naprezanje $\tau_{x\xi}^c$, se može odrediti iz uvjeta ravnoteže (suma projekcija svih sila u smjeru osi x je jednaka nuli) elementa stijenke prikazanog na slici 3.5, a koji glasi

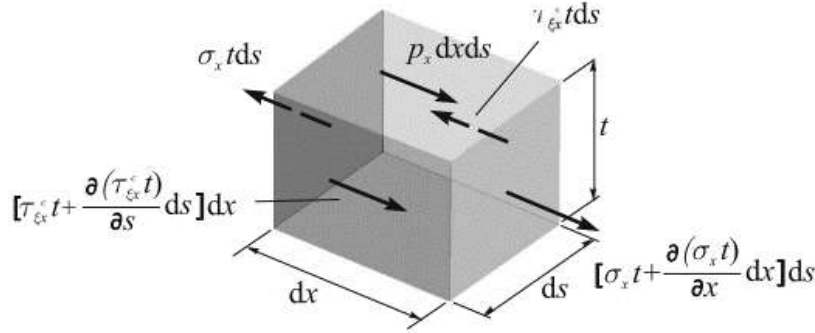
$$\frac{\partial(\sigma_x t)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{x\xi}^c t)}{\partial s} + p_x = 0 \quad (3.13)$$

gdje je p_x sila na jedinicu površine u smjeru osi x .

Jednoliko posmično naprezanje $\tau_{x\xi}^c$ slijedi direktnom integracijom izraza (3.13) i glasi

$$\tau_{x\xi}^c = \frac{1}{t} \left[- \int_0^s \frac{\partial(\sigma_x t)}{\partial x} ds - \int_0^s p_x ds + T_M(x) \right] \quad (3.14)$$

gdje je T_M tok posmičnih sila na mjestu ishodišne točke M .



Slika 3.5. Ravnoteža elementa stijenke [1]

Primjenom izraza (3.9) se prethodno dani izraz može zapisati kao

$$\tau_{x\xi}^c = \frac{1}{t} \left[T_M - \int_0^s p_x ds - E \left(\frac{d^2 u_M}{dx^2} A(s) - \frac{d^3 v_P}{dx^3} S_z(s) - \frac{d^3 w_P}{dx^3} S_y(s) - \frac{d^3 \alpha_P}{dx^3} S_\omega(s) \right) \right] \quad (3.15)$$

gdje su: $A(s)$ površina dijela presjeka, $S_z(s)$ i $S_y(s)$ statički momenti površine dijela presjeka u odnosu na os z , odnosno y , a $S_\omega(s)$ je sektorski statički moment površine dijela presjeka. Ove vrijednosti su definirane kako slijedi

$$A(s) = \int_0^s dA; S_z(s) = \int_0^s y dA; S_y(s) = \int_0^s z dA; S_\omega(s) = \int_0^s \omega dA \quad (3.16)$$

Izraz (3.15) se također može napisati u obliku

$$\tau_{x\xi}^c = \frac{1}{t} \left[\int_{s^*} p_x ds + E \left(\frac{d^2 u_M}{dx^2} A^* - \frac{d^3 v_P}{dx^3} S_z^* - \frac{d^3 w_P}{dx^3} S_y^* - \frac{d^3 \alpha_P}{dx^3} S_\omega^* \right) \right] \quad (3.17)$$

gdje je s^* krivocrtna koordinata s ishodištem na slobodnom kraju poprečnog presjeka, na mjestu gdje nema posmičnih naprezanja, i za koju vrijedi

$$s^* = C - s \quad (3.18)$$

gdje je C konstanta koja se može odrediti iz uvjeta da je s^* jednako nuli na slobodnom kraju presjeka [1].

A^* je površina odsječenog dijela presjeka, S_z^* i S_y^* su statički momenti površine odsječenog dijela presjeka u odnosu na os z , odnosno y , a S_ω^* je sektorski statički moment površine odsječenog dijela presjeka. Ove vrijednosti su definirane kako slijedi

$$A^* = \int_{s^*} dA; S_z^* = \int_{s^*} y dA; S_y^* = \int_{s^*} z dA; S_\omega^* = \int_{s^*} \omega dA \quad (3.19)$$

gdje vrijedi

$$dA = t ds^* \quad (3.20)$$

Uvjeti ravnoteže odsječka štapa prikazanog na slici 3.6 su

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= \int_L \frac{\partial(\sigma_x t)}{\partial x} dx ds + q_x dx = 0 \\ \Sigma F_y &= \int_L \frac{\partial(\tau_{x\xi}^c t)}{\partial x} \cos(\varphi) dx ds + q_y dx = 0 \\ \Sigma F_z &= \int_L \frac{\partial(\tau_{x\xi}^c t)}{\partial x} \sin(\varphi) dx ds + q_z dx = 0 \\ \Sigma M_P &= \int_L \frac{\partial(\tau_{x\xi}^c t)}{\partial x} dx h_p ds + \frac{dM_t}{dx} dx + m_P dx = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

pri čemu su

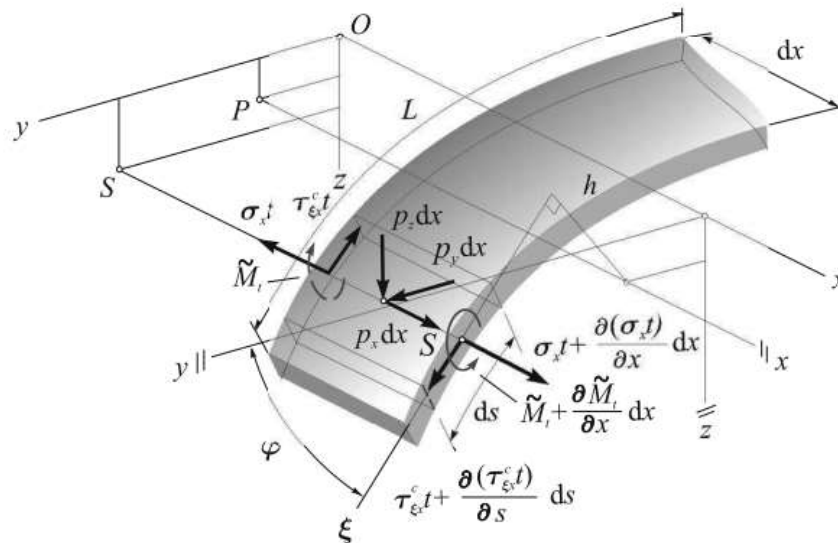
$$dA = t ds; dy = \cos(\varphi) ds; dz = \sin(\varphi) ds; d\omega = h_p ds \quad (3.22)$$

gdje su q_x, q_y, q_z redom sile na jedinicu duljine u smjeru koordinatnih osiju x, y i z , a m_p je moment uvijanja na jedinicu duljine. Ove vrijednosni su definirane kako slijedi

$$m_p = \int_L [p_z(y - a_y) - p_y(z - a_z)] ds \quad (3.23)$$

$$q_x = \int_L p_x ds; \quad q_y = \int_L p_y ds; \quad q_z = \int_L p_z ds$$

pri čemu su p_y i p_z redom sile na jedinicu površine u smjeru y i z osi, a L duljina štapa.



Slika 3.6. Ravnoteža odsječka štapa [1]

Temeljne jednadžbe ravnog tankostjenog štapa slijede uvrštavanjem izraza (3.9) i (3.17) u izraz (3.21), a koji se zatim parcijalno integrira. Ako su y, z i ω glavne koordinate, tada je P glavni pol poprečnog presjeka, a M glavna ishodišna točka poprečnog presjeka. Poprečni presjek štapa opterećenog na uvijanje rotira oko glavnog pola P poprečnog presjeka, a os uvijanja (smicanja) je paralelna uzdužnoj osi štapa i prolazi kroz glavni pol P . Temeljne jednadžbe tada glase [1, 2]

$$\begin{aligned}
EA \frac{d^2 u_M}{dx^2} &= -q_x \\
EI_z \frac{d^4 v_P}{dx^4} &= q_y - \frac{dm_z}{dx} \\
EI_y \frac{d^4 w_P}{dx^4} &= q_z + \frac{dm_y}{dx} \\
EI_\omega \frac{d^4 \alpha_P}{dx^4} - GI_t \frac{d^2 \alpha_P}{dx^2} &= m_P + \frac{db}{dx}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

gdje su m_y i m_z redom momenti na jedinicu duljine u smjeru y i z osi, a b je bimoment na jedinicu duljine definiran kao

$$b = \int_L \omega p_x ds \tag{3.25}$$

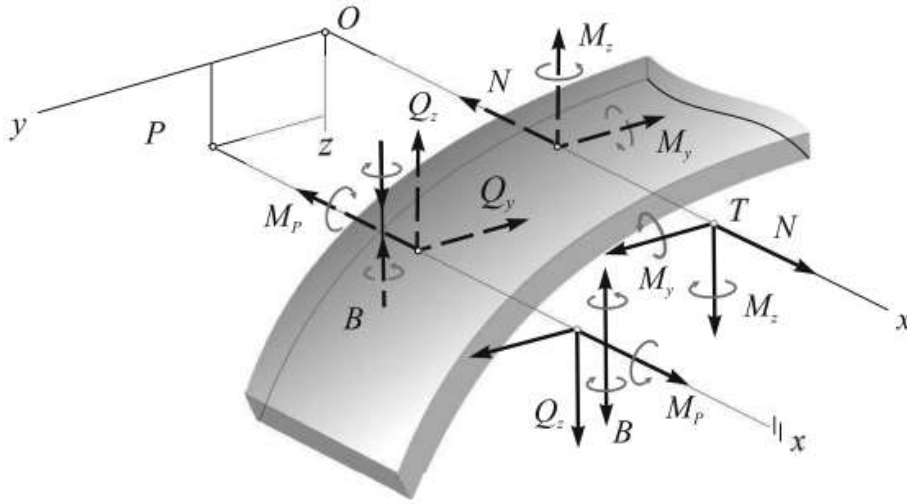
Geometrijske karakteristike tankostjenog poprečnog presjeka ravnog štapa su definirane kao

$$\begin{aligned}
I_y &= \int_A z^2 dA \\
I_z &= \int_A y^2 dA \\
I_\omega &= \int_A \omega^2 dA
\end{aligned} \tag{3.26}$$

gdje su I_y i I_z aksijalni momenti tromosti u odnosu na y i z os, a I_ω je sektorski moment tromosti.

Prva jednadžba izraza (3.24) se odnosi na pomake glavne ishodišne točke M u smjeru osi x zbog rastezanja/sabijanja štapa. Druga diferencijalna jednadžba se odnosi na pomake glavnog pola P u smjeru osi y uslijed savijanja štapa u horizontalnoj ravnini. Treća diferencijalna jednadžba se odnosi na pomake glavnog pola P u smjeru osi z uslijed savijanja štapa u vertikalnoj ravnini. Četvrta diferencijalna jednadžba se odnosi na zakrete poprečnog presjeka oko glavnog pola P uslijed uvijanja štapa. Središte savijanja i središte uvijanja su jedna te ista točka, a os savijanja i os uvijanja su jedna te ista os [1].

Na slici 3.7 su prikazani glavni koordinatni sustav odsječka ravnog tankostjenog štapa te komponente unutarnjih sila, kao pozitivne veličine, na desnom (pozitivnom) presjeku i lijevom (negativnom) presjeku, a koje su definirane kao [1]



Slika 3.7. Komponente unutarnjih sila odsječka štapa [1]

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma_x dA = AE \frac{du_M}{dx} \\
 Q_y &= \int_A \tau_{x\xi}^c \cos(\varphi) dA = -EI_z \frac{d^3 v_P}{dx^3} - m_z \\
 Q_z &= \int_A \tau_{x\xi}^c \sin(\varphi) dA = -EI_y \frac{d^3 w_P}{dx^3} + m_y \\
 M_y &= \int_A \sigma_x z dA = -EI_y \frac{d^2 w_P}{dx^2} \\
 M_z &= - \int_A \sigma_x y dA = EI_z \frac{d^2 v_P}{dx^2} \\
 B &= \int_A \sigma_x \omega dA = -EI_\omega \frac{d^2 \alpha_P}{dx^2} \\
 M_P &= M_\omega + M_t
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

i gdje vrijedi

$$M_\omega = \int_A \tau_{x\xi}^c h_P dA = -EI_\omega \frac{d^3 \alpha_P}{dx^3} + b \tag{3.28}$$

to jest

$$m_\omega = m_p + \frac{dM_t}{dx} \quad (3.29)$$

gdje je m_ω moment izvitoperenja po jedinici duljine.

N je uzdužna sila, Q_y i Q_z su poprečne sile u smjeru y i z osi, M_y i M_z su momenti savijanja oko y i z osi, B je bimoment, M_ω je moment izvitoperenja, a M_p moment uvijanja. Komponente unutarnjih sila ravnog tankostjenog štapa N , Q_y , Q_z , M_y , M_z i M_p se mogu odrediti iz uvjeta ravnoteže, dok se komponente B i M_ω mogu odrediti samo ako je poznata komponenta pomaka α_p [1]. Dok uzdužna sila uzrokuje translaciju poprečnog presjeka, a momenti njegovu rotaciju, bimoment uzrokuje izvitoperenje poprečnog presjeka. U analizi [2] tankostjenih štapova su uzdužna sila N i momenti savijanja, M_y i M_z , definirani u odnosu na težište T poprečnog presjeka; dok su poprečne sile, Q_y i Q_z , bimoment B i moment uvijanja M_p definirani u odnosu na glavni pol P .

Položaj glavnog pola P se u općem slučaju razlikuje od položaja težišta T poprečnog presjeka, no kod poprečnog presjeka s dvije osi simetrije se glavni pol P , težište T i glavna ishodišna točka M nalaze u istoj točki poprečnog presjeka. Postupak određivanja geometrijskih karakteristika tankostjenog poprečnog presjeka je opisan u [1, 2, 32].

Izraz (3.9) primjenom izraza (3.27) prelazi u

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{B}{I_\omega} \omega \quad (3.30)$$

dok se ukupno pomično naprezanje $\tau_{x\xi}$, primjenom izraza (3.10), (3.17), (3.27) i (3.28) može zapisati kao

$$\begin{aligned} \tau_{x\xi} = \tau_{x\xi}^c + \tau_{x\xi}^l = & \frac{1}{t} \left(\int_{S^*} p ds - q_x \frac{A^*}{A} \right) + \frac{(Q_y + m_z) S_z^*}{t I_z} \\ & + \frac{(Q_z - m_y) S_y^*}{t I_y} + \frac{(M_\omega - b) S_\omega^*}{t I_\omega} + \frac{M_t}{I_t} t \end{aligned} \quad (3.31)$$

Posljednji član izraza (3.30) predstavlja komponentu normalnog naprezanja uslijed izvitoperenja poprečnog presjeka te je karakterističan za tankostjene štapove. Prvi, četvrti i peti član izraza (3.31) predstavljaju komponente posmičnog naprezanja uslijed izvitoperenja poprečnog presjeka tankostjenog štapa [1]. Temeljne jednačbe ravnog tankostjenog štapa su definirane izrazom (3.24) te se može vidjeti da su one raspregnute (engl. *uncoupled*), to jest komponentne pomaka u_M , v_P , w_P i α_P su nezavisne varijable. Ove temeljne jednačbe se mogu riješiti analitički pomoću geometrijskih rubnih uvjeta (poopćeni pomaci su zadani) ili pomoću statičkih rubnih uvjeta (poopćene sile su zadane) [32].

Mnoga se istraživanja temelje na prethodno opisanoj teoriji i među kojima je potrebno izdvojiti teoriju savijanja i uvijanja ravnog tankostjenog štapa otvorenog poprečnog presjeka s utjecajem smicanja [1, 27, 28, 34, 35], a u kojoj je analitički uključen utjecaj kutne deformacije srednje plohe na normalna naprezanja i što je bitno u analizi kratkih štapova.

Temeljna jednačba ravnog štapa Euler – Bernoullijeve teorije je identična analognoj jednačbi izraza (3.24), a isti odnos vrijedi za Timošenkovu teoriju i teoriju savijanja s utjecajem smicanja, uz sljedeća ograničenja:

1. glavni pol se nalazi u težištu poprečnog presjeka,
2. ravni štap je opterećen na savijanje opterećenjem $q_z(x)$ u smjeru glavne osi z .

Naime, polja pomaka Euler – Bernoullijeve i Timošenkove teorije su definirana u odnosu na težište poprečnog presjeka, dok su polja pomaka izraza (3.24) i analognog izraza u kojem je uključen utjecaj kutne deformacije srednje plohe definirana u odnosu na glavni pol.

4. SAVIJANJE DEBELOSTJENOG ZAKRIVLJENOG ŠTAPA

Prethodno su opisane teorije korištene u analizi ravnih štapova, a u nastavku teksta je opisano savijanje debelostjenog zakrivljenog štapa. Neka je h visina poprečnog presjeka štapa, a R polumjer težišne linije. Ako vrijedi

$$\frac{h}{R} < \frac{1}{10} \quad (4.1)$$

tada se debelostjeni štap tretira kao ravni štap, a ako vrijedi

$$\frac{h}{R} > \frac{1}{3} \quad (4.2)$$

tada se debelostjeni štap tretira kao zakrivljeni štap. Težišna linija je linija koja spaja težišta svih poprečnih presjeka štapa. Za ravne štapove vrijedi

$$R = \infty \quad (4.3)$$

te je uvjet dan u izrazu (4.1) zadovoljen [31].

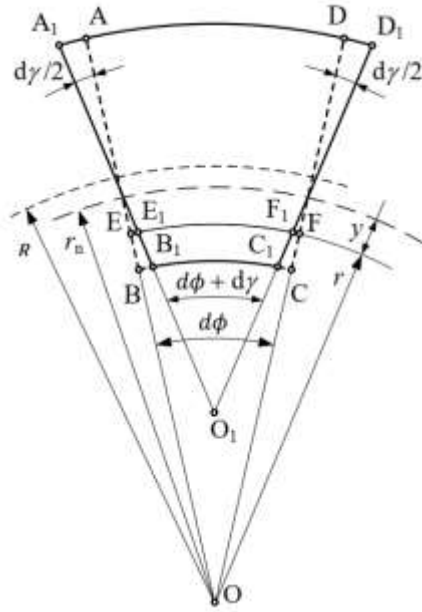
Analiza debelostjenog zakrivljenog štapa opisana u nastavku poglavlja se temelji na sljedećim pretpostavkama:

1. deformirani poprečni presjeci su ravni i okomiti na deformiranu težišnu liniju štapa,
2. u štapu vlada približno jednoosno stanje naprezanja.

Ograničenja postupka opisanog u nastavku poglavlja su:

1. štap je opterećen na čisto savijanje (sve komponente unutarnjih sila osim momenta savijanja M_z su jednake nuli),
2. poprečni presjek ima jednu os simetrije koja se nalazi u ravnini zakrivljenosti [31, 36].

Na slici 4.1 je crtkanom linijom prikazan nedeformirani element $ABCD$, a punom linijom deformirani element $A_1B_1C_1D_1$; gdje je $d\phi$ kut između linija AB i CD , a $d\phi + d\gamma$ kut između linija A_1B_1 i C_1D_1 . r i ϕ su polarne koordinate, r_n je polumjer zakrivljenosti neutralne plohe i y je udaljenost neutralne plohe i zakrivljenog vlakna EF .



Slika 4.1. Deformiranje zakrivljenog debelostjenog štapa [31]

Duljinska deformacija zakrivljenog vlakna EF , ε_x , slijedi geometrijskom analizom iz slike 4.1 i glasi

$$\varepsilon_x = \frac{r - r_n}{r} \frac{d\gamma}{d\phi} \quad (4.4)$$

gdje je r_n polumjer zakrivljenosti neutralne plohe kao nepoznati parametar, dok je $\frac{d\gamma}{d\phi}$ nepoznata funkcija koja je konstantna za razmatrani presjek.

Normalno naprezanje σ_x , je zbog druge pretpostavke definirano kao

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\varepsilon_x = E \frac{r - r_n}{r} \frac{d\gamma}{d\phi} \quad (4.5)$$

gdje je E modul elastičnosti.

Nepoznati parametar u izrazu (4.4) slijedi iz uvjeta ravnoteže, a kako je ova analiza ograničena na čisto savijanje zakrivljenog debelostjenog štapa, dobiva se

$$r_n = \frac{\int_A dA}{\int_A \frac{dA}{r}} = \frac{A}{J_1} \quad (4.6)$$

gdje je A površina poprečnog presjeka, a J_1 geometrijska karakteristika zakrivljenog debelostjenog štapa definirana kao

$$J_1 = \int_A \frac{dA}{r} \quad (4.7)$$

Nepoznata funkcija u izrazu (4.4) je definirana kao

$$\frac{d\gamma}{d\phi} = \frac{M_z}{ES_z} \quad (4.8)$$

gdje je $S_z = eA$ statički moment površine, a $e = R - r_n$ ekscentricitet.

Time se normalno naprezanje može izraziti u obliku

$$\sigma_x = \frac{M_z}{S_z} \left(1 - \frac{r_n}{r}\right) \quad (4.9)$$

Za razmatrani poprečni presjek je raspodjela normalnog naprezanja hiperbolična funkcija polumjera r po visini poprečnog presjeka, za koju vrijedi

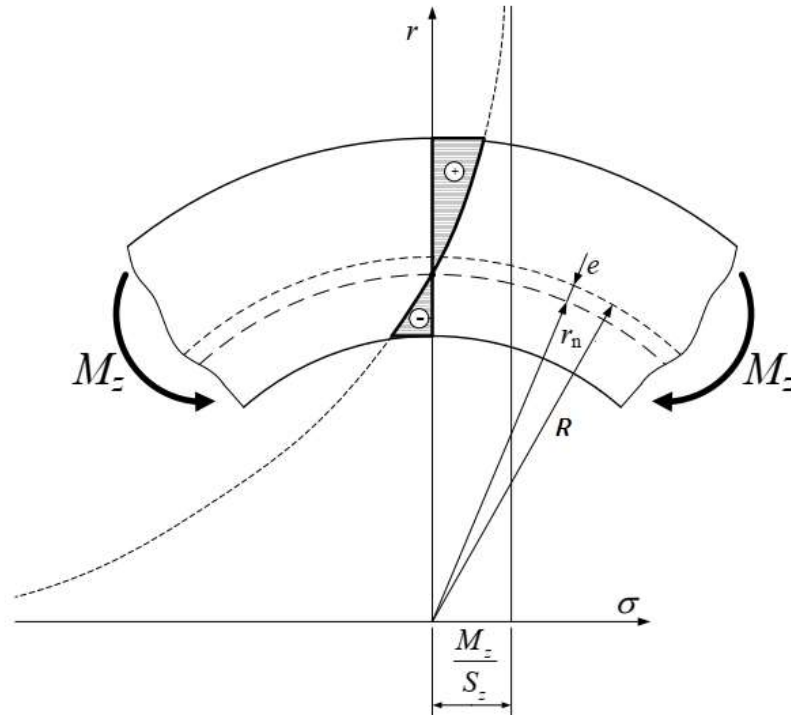
$$\begin{aligned} \sigma_x(0) &= -\infty \\ \sigma_x(\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Raspodjela normalnog naprezanja po visini presjeka je hiperbolična i prikazana je na slici 4.2, dok je u ravnom štapu raspodjela normalnog naprezanja linearna po visini presjeka. Kod debelostjenih štapova velikog polumjera zakrivljenosti R je raspodjela normalnog naprezanja približno linearna kao i kod ravnih štapova [37].

Promjena polumjera zakrivljenosti težišne linije debelostjenog zakrivljenog štapa glasi

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{1}{R} \frac{M_z}{S_z} \quad (4.11)$$

gdje je R' polumjer zakrivljenosti težišne linije poslije deformiranja [31].



Slika 4.2. Raspodjela normalnog naprezanja po visini poprečnog presjeka [31]

Prethodno je opisano savijanje debelostjenog zakrivljenog štapa u ravnini zakrivljenosti, a pri izračunu polumjera neutralne plohe r_n je korišten uvjet da nema normalne sile ($N = 0$). Kada je tankostjeni zakrivljeni štap otvorenog poprečnog presjeka opterećen u ravnini zakrivljenosti, kao unutarnje sile se javljaju moment savijanja M_z i normalna sila N . U nastavku teksta su opisane metode korištene u analizi tankostjenih zakrivljenih štapova otvorenog poprečnog presjeka. Izraz (4.9) opisuje raspodjelu naprezanja po visini poprečnog presjeka debelostjenog zakrivljenog štapa te se on razlikuje od izraza za naprezanje tankostjenog zakrivljenog štapa otvorenog poprečnog presjeka. Izraz (4.1) definira uvjet kada se debelostjeni zakrivljeni štap može smatrati ravnim, a u sljedećem poglavlju je opisan postupak analize tankostjenih zakrivljenih štapova i čija je primjena ograničena upravom s tim uvjetom.

5. ANALIZA TANKOSTJENIH ZAKRIVLJENIH ŠTAPOVA TEMELJENA NA IZRAZIMA ZA RAVNE ŠTAPOVE

Distorzija i izvitoperenje zakrivljenih štapova zatvorenog tankostjenog poprečnog presjeka su analizirani u [38 – 40], a u nastavku teksta su opisane analitičke metode korištene u analizi zakrivljenih štapova otvorenog tankostjenog poprečnog presjeka i u kojima je distorzija poprečnog presjeka zanemarena.

Dva su pristupa korištena u analizi tankostjenih zakrivljenih štapova otvorenog poprečnog presjeka. U prvom pristupu su temeljne jednadžbe zakrivljenog štapa određene uz primjenu izraza za ravne štapove. Ovaj je pristup korišten u ranim istraživanjima tankostjenih zakrivljenih štapova i opisan je u ovom poglavlju. U drugom pristupu su temeljne jednadžbe tankostjenog zakrivljenog štapa otvorenog poprečnog presjeka određene uz korištenje jednadžbi teorije elastičnosti, a što je opisano u šestom poglavlju. Sve metode opisane u nastavku teksta su ograničene na štapove kod kojih nedeformirana težišna linija štapa ima oblik kružnog luka, odnosno na zakrivljene štapove.

U [2] je pri analizi tankostjenih zakrivljenih štapova otvorenog poprečnog presjeka korištena analogija izraza za normalno naprezanje i veze unutarnja sila – pomak između ravnih i zakrivljenih štapova. To jest, izrazi za unutarnje sile zakrivljenog štapa slijede kada se u izrazima za unutarnje sile ravnog štapa, izraz (3.27), mjere deformacije ravnog štapa zamijene s mjerama deformacije zakrivljenog štapa. Kod analogije naprezanja, izraz za normalno naprezanje ravnog štapa (3.30), je korišten u analizi zakrivljenog štapa. Primjena ove metode je ograničena na tankostjene zakrivljene štapove otvorenog poprečnog presjeka kod kojih vrijedi

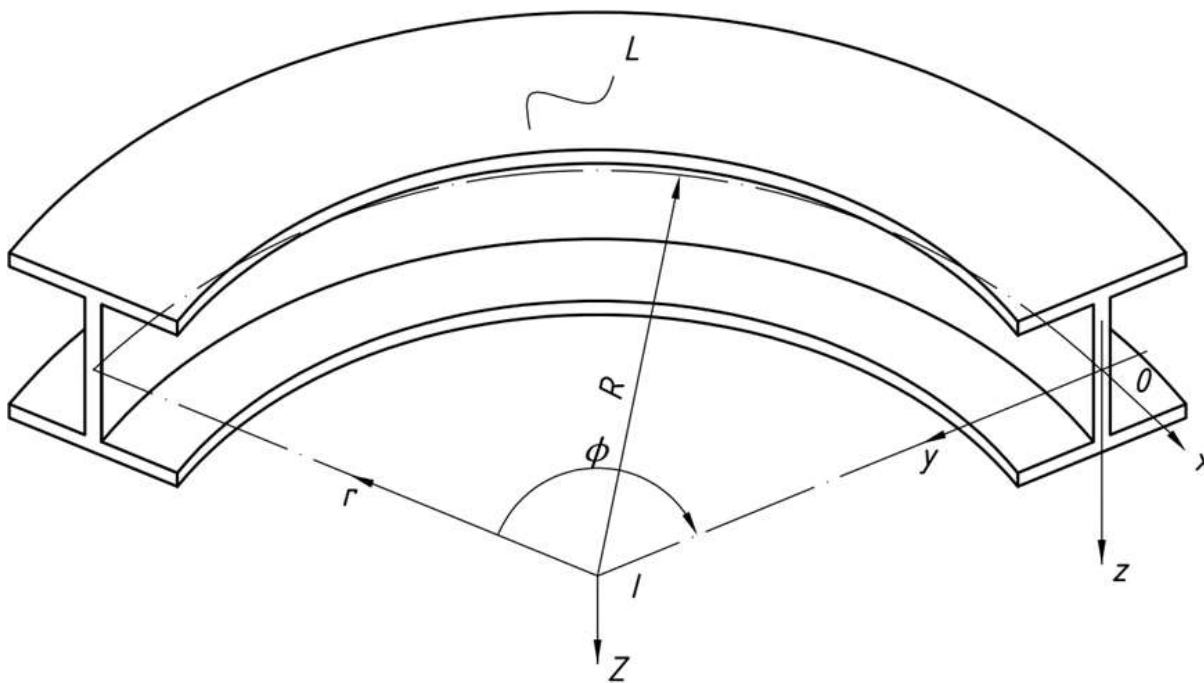
$$\frac{h}{R} < 0,1 \quad (5.1)$$

gdje je h karakteristična dimenzija poprečnog presjeka, a R početni polumjer zakrivljenosti težišne linije. Zbog danog ograničenja se može smatrati da vrijedi [2]

$$\begin{aligned} \frac{a_y}{R} &\ll 1 \\ \frac{a_z}{R} &\ll 1 \end{aligned} \quad (5.2)$$

gdje su a_y i a_z pravokutne koordinate glavnog pola P poprečnog presjeka iskazane u odnosu na težište T poprečnog presjeka.

Tankostjeni zakrivljeni štap duljine L i polumjera zakrivljenosti težišne linije R je prikazan na slici 5.1. $Oxyz$ je desni pravokutni koordinatni sustav i čije je ishodište u težištu T poprečnog presjeka. $lr\phi Z$ je cilindrični koordinatni sustav zakrivljenog štapa čije je ishodište u središtu zakrivljenosti težišne linije i gdje je ϕ varijabla obodnog kuta štapa. Pravac koordinatne osi x poprečnog presjeka je definiran kao tangenta na zakrivljenu težišnu liniju, a pozitivni smjer osi x je u smjeru prirasta varijable ϕ . Koordinatna os y pravokutnog koordinatnog sustava je usmjerena suprotno od osi r cilindričnog koordinatnog sustava, a os z je okomita na ravninu zakrivljenosti.



Slika 5.1. Tankostjeni zakrivljeni štap

Položaj razmatranog poprečnog presjeka zakrivljenog štapa je definiran krivocrtnom koordinatom l za koju vrijedi

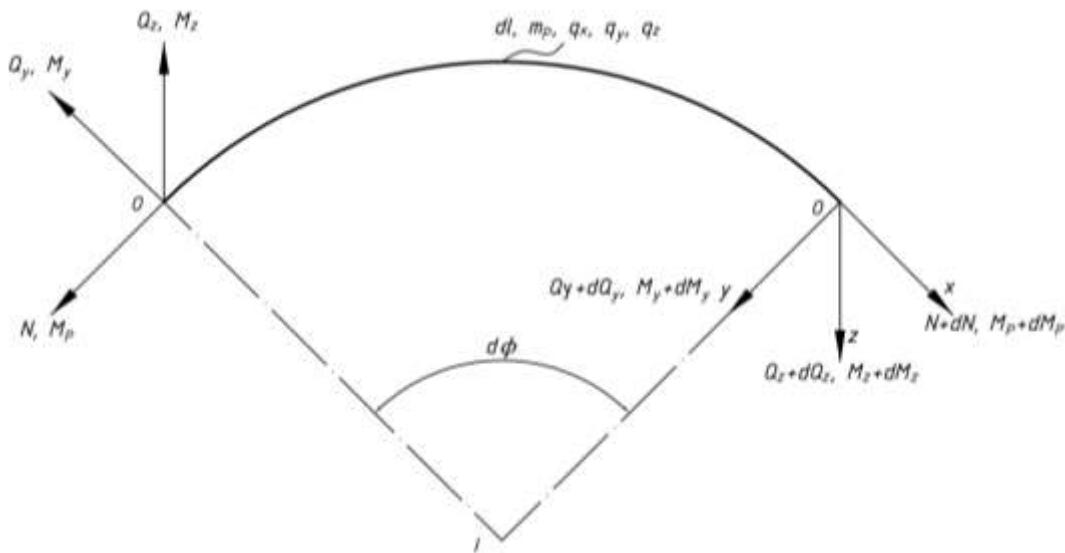
$$l = R\phi \quad (5.3)$$

to jest

$$dl = R d\phi \quad (5.4)$$

Prema [2] se u analizi ravnih štapova moment uvijanja odnosi na glavni pol P , a momenti savijanja na težište T poprečnog presjeka (slika 3.7). Relativni položaj glavnog pola je u odnosu na težište definiran članovima a_y i a_z , ali zbog izraza (5.2) ti članovi nisu uključeni u ovu analizu; te se može smatrati da se težište poprečnog presjeka i glavni pol nalaze u istoj točki poprečnog presjeka zakrivljenog štapa. Bitno je naglasiti da ovaj postupak analize tankostjenih zakrivljenih štapova otvorenog poprečnog presjeka nema ograničenje na sam oblik poprečnog presjeka, ali uvjet (5.1) mora biti zadovoljen. Odsječak težišne linije zakrivljenog štapa je prikazan na slici 5.2 i gdje su sve unutarnje sile definirane u odnosu na težište poprečnog presjeka.

Jednadžbe ravnoteže zakrivljenog tankostjenog štapa, u vektorskoj mehanici, slijede geometrijskom analizom odsječka štapa primjenom uvjeta ravnoteže te glase



Slika 5.2. Odsječak težišne linije zakrivljenog štapa s unutarnjim silama

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{dl} - \frac{Q_y}{R} + q_x &= 0 \\
\frac{dQ_y}{dl} + \frac{N}{R} + q_y &= 0 \\
\frac{dQ_z}{dl} + q_z &= 0
\end{aligned}
\tag{5.5}$$

i

$$\begin{aligned}
\frac{dM_P}{dl} - \frac{M_y}{R} + m_P &= 0 \\
\frac{dM_y}{dl} - Q_z + \frac{M_P}{R} &= 0 \\
\frac{dM_z}{dl} + Q_y &= 0
\end{aligned}
\tag{5.6}$$

Oznake fizikalnih veličina tankostjenih ravnih štapova otvorenog poprečnog presjeka, a koje su definirane u trećem poglavlju ovog rada, su korištene u ovoj analizi tankostjenih zakrivljenih štapova otvorenog poprečnog presjeka. Pri ovoj analogiji oznaka je potrebno imati na umu izraz (5.2).

Prethodno dane jednadžbe ravnoteže se eliminiranjem sila mogu iskazati u obliku

$$\begin{aligned}
M_z''' + \frac{M_z'}{R^2} - q_y' + \frac{q_x}{R} &= 0 \\
M_y'' + \frac{M_P'}{R} + q_z &= 0 \\
-\frac{M_y}{R} + M_P' + m_P &= 0
\end{aligned}
\tag{5.7}$$

pri čemu su derivacije varijabli skraćeno označene na sljedeći način

$$(\quad)' = \frac{d(\quad)}{dl}
\tag{5.8}$$

U izrazu (5.7) su dane jednadžbe ravnoteže zakrivljenog štapa prema [2], a u nastavku poglavlja je opisano određivanje mjera deformacija zakrivljenog štapa. $Oxyz$ je koordinatni sustav nedeformiranog štapa i čije je ishodište u težištu nedeformiranog poprečnog presjeka, dok je $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ koordinatni sustav deformiranog štapa i čije je ishodište u težištu deformiranog poprečnog presjeka. Zbog uvjeta (5.2) je relativni položaj glavnog pola u odnosu na težište poprečnog presjeka zanemaren.

Duljinska deformacija zakrivljenog vlakna tankostjenog štapa ε_x , je definirana kao [2, 41]

$$\varepsilon_x = u_M' - \frac{v_P}{R} \quad (5.9)$$

Zakrivljenosti deformirane težišne linije zakrivljenog štapa iskazane u $Oxyz$ koordinatnom sustavu glase

$$\begin{aligned} k_x &= \alpha_P' \\ k_y &= -w_P'' \\ k_z &= v_P'' + \frac{1}{R} + \frac{v_P}{R^2} \end{aligned} \quad (5.10)$$

gdje su:

$k_x(l)$ – projekcija zakrivljenosti uslijed uvijanja zakrivljene težišne linije na koordinatnu os x ,

$k_y(l)$ – projekcija zakrivljenosti u ravnini Oxz na koordinatnu os y ,

$k_z(l)$ – projekcija zakrivljenosti u ravnini Oxy na koordinatnu os z .

Ako se u obzir uzme izraz (5.2), projekcije zakrivljenosti k_x i k_y te prvi član projekcije zakrivljenosti k_z su definirani kao i kod ravnih štapova [2]. Projekcija zakrivljenosti k_z sadrži dodatne članove zbog početne zakrivljenosti štapa u Oxy ravnini. Kada je koordinatna os y pravokutnog koordinatnog sustava usmjerena suprotno od koordinatne osi r cilindričnog koordinatnog sustava, pozitivni pomak težišta u smjeru osi y predstavlja negativni pomak težišta u smjeru osi r i promjena zakrivljenosti je tada definirana kao [41]

$$\begin{aligned} \frac{1}{R - v_P} - \frac{1}{R} &= \frac{1}{R} \left(\frac{1}{1 - v_P/R} \right) - \frac{1}{R} \\ &= \frac{1}{R} \left(1 + \frac{v_P}{R} + \left(\frac{v_P}{R} \right)^2 + \left(\frac{v_P}{R} \right)^3 + \dots \right) - \frac{1}{R} = \frac{v_P}{R^2} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Prethodni izraz zanemarivanjem veličina višeg reda prelazi u

$$\frac{1}{R - v_P} = \frac{1}{R} + \frac{v_P}{R^2} \quad (5.12)$$

te se može vidjeti da drugi član zakrivljenosti k_z opisuje početnu zakrivljenost štapa, a treći član opisuje promjenu zakrivljenosti težišne linije uslijed pomaka v_P u smjeru osi y .

Zakrivljenosti deformirane težišne linije iskazane u $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ koordinatnom sustavu slijede iz izraza

$$\begin{Bmatrix} k_{\bar{x}} \\ k_{\bar{y}} \\ k_{\bar{z}} \end{Bmatrix} = [\mathbf{R}] \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

gdje su:

$k_{\bar{x}}(l)$ – projekcija zakrivljenosti na koordinatnu os \bar{x} ,

$k_{\bar{y}}(l)$ – projekcija zakrivljenosti na koordinatnu os \bar{y} ,

$k_{\bar{z}}(l)$ – projekcija zakrivljenosti na koordinatnu os \bar{z} ,

pri čemu je \mathbf{R} matrica rotacije koordinatnih osiju poprečnog presjeka, a koja je zanemarivanjem veličina višeg reda definirana kao [42]

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -v_P' & -w_P' \\ v_P' & 1 & -\alpha_P \\ w_P' & \alpha_P & 1 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Iz izraza (5.10), (5.13) i (5.14) slijede zakrivljenosti iskazane u $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ koordinatnom sustavu

$$\begin{aligned} k_{\bar{x}} &= w_P'' v_P' - \left(\frac{1}{R} + v_P'' + \frac{v_P}{R^2} \right) w_P' + \alpha_P' \\ k_{\bar{y}} &= -w_P'' - \left(\frac{1}{R} + v_P'' + \frac{v_P}{R^2} \right) \alpha_P + \alpha_P' v_P' \\ k_{\bar{z}} &= -w_P'' \alpha_P + \frac{1}{R} + v_P'' + \frac{v_P}{R^2} + \alpha_P' w_P' \end{aligned} \quad (5.15)$$

a koje se zanemarivanjem malih veličina višeg reda mogu zapisati kao

$$\begin{aligned}
 k_{\bar{x}} &\cong \alpha_P' - \frac{w_P'}{R} \\
 k_{\bar{y}} &\cong -w_P'' - \frac{\alpha_P}{R} \\
 k_{\bar{z}} &\cong v_P'' + \frac{v_P}{R^2}
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Unutarnje sile tankostjenog ravnog štapa su dane u (3.27). Zbog veze unutarnja sila – pomak, unutarnje sile zakrivljenog tankostjenog štapa otvorenog poprečnog presjeka slijede iz izraza (5.9), izraza (5.16) i izraza (3.27) te su definirane kao [2]

$$\begin{aligned}
 N &= AE \left(u_M' - \frac{v_P}{R} \right) \\
 M_y &= -EI_y \left(w_P'' + \frac{\alpha_P}{R} \right) \\
 M_z &= EI_z \left(v_P'' + \frac{v_P}{R^2} \right) \\
 M_P &= -EI_\omega \left(\alpha_P''' - \frac{w_P'''}{R} \right) + GI_t \left(\alpha_P' - \frac{w_P'}{R} \right) \\
 B &= -EI_\omega \left(\alpha_P'' - \frac{w_P''}{R} \right)
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Unutarnja sila N je funkcija pomaka u ravnini zakrivljenosti u_M i v_P , dok su unutarnje sile M_y , M_P i B funkcije kuta uvijanja α_P i pomaka u smjeru koordinatne osi okomite na ravninu zakrivljenosti w_P . Također se može vidjeti da su sve unutarnje sile u prethodnom izrazu funkcije polumjera zakrivljenosti težišne linije R . U izrazu (3.27) su poprečne sile definirane pomoću posmičnog naprezanja, dok se u ovoj metodi moraju koristiti jednadžbe ravnoteže dane u izrazima (5.5) i (5.6) za definiranje poprečnih sila.

Izraz (5.17) uvršten u izraz (5.7) rezultira s temeljnim jednadžbama tankostjenog zakrivljenog štapa otvorenog poprečnog presjeka

$$\begin{aligned}
 EI_z \left(v_P^V + 2 \frac{v_P'''}{R^2} + \frac{v_P'}{R^4} \right) - q'_y + \frac{q_x}{R} &= 0 \\
 -E \left(I_y - \frac{I_\omega}{R^2} \right) w_P^{IV} - \frac{GI_t}{R^2} w_P'' - \frac{EI_\omega}{R} \alpha_P^{IV} + \frac{GI_t - EI_y}{R} \alpha_P'' + q_z &= 0 \quad (5.18) \\
 \frac{EI_\omega}{R} w_P^{IV} + \frac{EI_y - GI_t}{R} w_P'' - EI_\omega \alpha_P^{IV} + GI_t \alpha_P'' + \frac{EI_y}{R} \alpha_P + m_P &= 0
 \end{aligned}$$

Prva temeljna jednadžba izraza (5.18) opisuje savijanje štapa u ravnini zakrivljenosti (engl. *in plane bending*) te se odnosi na štap opterećen u ravnini zakrivljenosti komponentama opterećenja q'_y i q_x , a koje uzrokuju pomak v_P u ravnini zakrivljenosti. Zbog izraza (5.9) se uslijed savijanja štapa u ravnini zakrivljenosti pojavljuje i normalna sila N te su pomaci u ravnini zakrivljenosti, u_M i v_P , spregnuti (engl. *coupled*)

Druga i treća temeljna jednadžba izraza (5.18) istodobno opisuju savijanje štapa izvan ravnine zakrivljenosti (engl. *out of plane bending*) i uvijanje štapa te se odnose na štap opterećen izvan ravnine zakrivljenosti komponentama opterećenja q_z i m_P . U ovim je jednadžbama opisana spregnutost kuta uvijanja konture poprečnog presjeka α_P i pomaka težišta u smjeru koordinatne osi okomite na ravninu zakrivljenosti w_P .

Kod ravnih tankostjenih štapova su sve komponente pomaka raspregnute u temeljnim jednadžbama, izraz (3.24). Kada polumjer zakrivljenosti težišne linije teži u beskonačnost, zakrivljeni štap prelazi u ravni štap i tada izraz (5.18) prelazi u općenitiju verziju temeljnih jednadžbi ravnog tankostjenog štapa

$$\begin{aligned}
 EI_z v_P^V &= q'_y \\
 EI_y w_P^{IV} &= q_z \\
 EI_\omega \alpha_P^{IV} - GI_t \alpha_P'' &= m_P
 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Prva jednađba izraza (5.19) formalno predstavlja derivirani oblik druge jednađbe izraza (3.24), to jest prva jednađba izraza (5.19) predstavlja općenitiju temeljnu jednađbu savijanja ravnog tankostjenog štapa otvorenog poprečnog presjeka oko osi z . Ovo je posljedica početne zakrivljenosti težišne linije u Oxy ravnini.

Zadnje dvije jednađbe u izrazu (5.19) i (3.24) su formalno jednake i predstavljaju temeljne jednađbe ravnog tankostjenog štapa otvorenog poprečnog presjeka te opisuju savijanje oko osi y i uvijanje. Pri ovoj analogiji temeljnih jednađbi je potrebno imati na umu izraz (5.2).

U ovoj se metodi također pretpostavlja da je normalno naprezanje zakrivljenog štapa u smjeru x osi, σ_x , jednako izrazu za normalno naprezanje ravnog štapa (izraz (3.30)) te glasi

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{B}{I_\omega} \omega \quad (5.20)$$

Primjenom ovog postupka je analiziran tankostjeni zakrivljeni kutijasti nosač u [43, 44], a u [45] je analiziran tankostjeni zakrivljeni štap otvorenog poprečnog presjeka s dvije osi simetrije pod djelovanjem opterećenja izvan ravnine zakrivljenosti, uz zanemarivanje uvijanja poprečnog presjeka.

Timošenko [46] je sličnim pristupom analizirao zakrivljeni štap opterećen u ravnini zakrivljenosti, gdje je moment savijanja jednak trećoj jednađba izraza (5.17). Unutarnja sila N je u ovom pristupu zanemarena, to jest zanemarena je spregnutost pomaka u ravnini zakrivljenosti.

6. ANALIZA TANKOSTJENIH ZAKRIVLJENIH ŠTAPOVA TEMELJENA NA JEDNADŽBAMA TEORIJE ELASTIČNOSTI

Prethodno su opisane metode u kojima se, pri definiranju temeljnih jednadžbi zakrivljenih štapova, koriste izrazi za ravne štapove. U ovom su poglavlju opisane metode temeljene na jednadžbama teorije elastičnosti koje su iskazane ili u cilindričnom ili u sfernom koordinatnom sustavu.

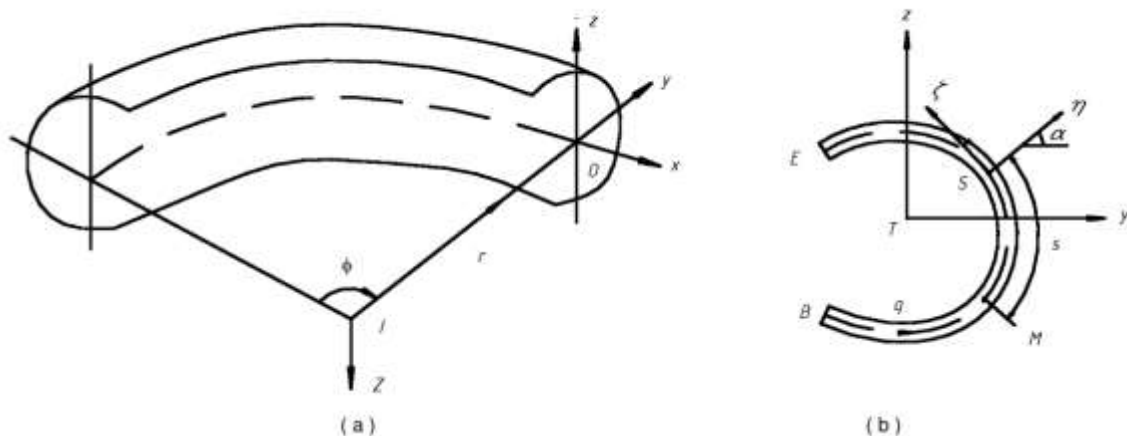
6.1. Analiza tankostjenih zakrivljenih štapova proizvoljnog oblika poprečnog presjeka

U [2] je predložena teorija ravnih tankostjenih štapova koja se temelji na cilindričnim ljuskama. Cilindrična ljuska, čija uzdužna os tvori kružni luk, se može smatrati rotacijskom ljuskom (engl. *shell of revolution*), a čije su temeljne jednadžbe teorije elastičnosti iskazane u sfernom koordinatnom sustavu [41]. Tankostjeni zakrivljeni štapovi otvorenog i proizvoljnog oblika poprečnog presjeka te polumjera zakrivljenosti težišne linije R su analizirani pomoću jednadžbi teorije elastičnosti rotacijskih ljuski u [47], te je ovaj pristup opisan u nastavku teksta.

U ovoj metodi su korištena tri koordinatna sustava prikazana na slici 6.1:

1. $Ir\phi Z$ je cilindrični koordinatni sustav zakrivljenog štapa i čije je ishodište u središtu zakrivljenosti težišne linije, slika 6.1.a,
2. $Oxyz$ je desni pravokutni Kartezijev koordinatni sustav poprečnog presjeka i čije je ishodište u težištu T poprečnog presjeka, slika 6.1.a,
3. $S\eta\xi x$ je koordinatni sustav srednje linije poprečnog presjeka i prikazan je na slici 6.1.b. α je kut između normale η i koordinatne osi y u proizvoljnoj točki S srednje linije poprečnog presjeka.

Os x je definirana u pravcu tangente na zakrivljenu težišnu liniju i njezin je pozitivni smjer u smjeru prirasta varijable ϕ . Koordinatne osi y i r su jednako usmjerene, a os z je okomita na ravninu zakrivljenosti.



Slika 6.1. Koordinatni sustav zakrivljenog štapa proizvoljnog poprečnog presjeka [47]

v_P i w_P su redom pomaci glavnog pola $P(a_y, a_z)$, a v_s i w_s proizvoljne točke S srednje linije poprečnog presjeka u smjeru koordinatnih osiju y i z ; dok su $\tilde{w}_s(x, \eta)$ i $\tilde{v}_s(x, \xi)$ redom pomaci u smjeru normale η i tangente ξ u točki S konture poprečnog presjeka; u_s je pomak točke S u smjeru osi x , to jest obodni pomak, a α_P je kut uvijanja srednje linije (konture) poprečnog presjeka oko glavnog pola P i koji je pozitivan kada mu je smisao zakretanja suprotan smjeru gibanja kazaljke na satu. s je krivocrtna koordinata čija je ishodišna točka $M(y_M, z_M)$.

Tankostjeni zakrivljeni štap, prikazan na slici 6.1.a, može se dobiti rotacijom profila BME , prikazanog na slici 6.1.b, oko osi Z cilindričnog koordinatnog sustava. Kako se ravni tankostjeni štap može smatrati ljuskom, tankostjeni zakrivljeni štap konstantnog polumjera zakrivljenosti težišne linije se može smatrati rotacijskom ljuskom. Tada se krivocrtna koordinata s može smatrati meridijalnom koordinatom, a koordinata x obodnom koordinatom rotacijske ljuske. Kutna deformacija srednje plohe rotacijske ljuske se tada može definirati kao

$$\gamma_{x\xi} = \frac{\partial \tilde{v}_s}{r \partial \phi} + \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_s}{r} \sin \alpha \quad (6.1)$$

Ova metoda se temelji na sljedećim pretpostavkama:

1. oblik poprečnog presjeka se ne mijenja tijekom deformiranja,
2. kutne deformacije u srednjoj plohi rotacijske ljuske su jednake nuli,
3. materijal je linearno elastičan.

Zbog prve pretpostavke su pomaci u ravnini poprečnog presjeka definirani kao

$$\begin{aligned} v_s &= v_p - (z - a_z)\alpha_p \\ w_s &= w_p + (y - a_y)\alpha_p \end{aligned} \quad (6.2)$$

te je pomak točke S u smjeru tangente ξ definiran kao

$$\tilde{v}_s = -v_s \sin\alpha + w_s \cos\alpha = -v_p \sin\alpha + w_p \cos\alpha + h_p \alpha_p \quad (6.3)$$

gdje je h_p okomica iz glavnog pola $P(a_y, a_z)$ na tangentu u točki $S(y, z)$ i definirana je izrazom

$$h_p = (z - a_z)\cos\alpha + (y - a_y)\sin\alpha \quad (6.4)$$

Kako se zbog druge pretpostavke kutne deformacije srednje plohe mogu zanemariti

$$\gamma_{x\xi} = 0 \quad (6.5)$$

izraz (6.1) se može zapisati kao

$$\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_s}{r} \sin\alpha = -\frac{1}{r} (-v_p' \sin\alpha + w_p' \cos\alpha + h_p \alpha_p') \quad (6.6)$$

gdje vrijedi

$$r = R + y \quad (6.7)$$

pri čemu su derivacije varijabli skraćeno označene na sljedeći način

$$(\quad)' = \frac{d(\quad)}{d\phi} \quad (6.8)$$

Za razliku od ravnog tankostjenog štapa, gdje se pomak u_s iz izraza (3.4) može odrediti direktnom integracijom te je dan u izrazu (3.5), ovdje to nije slučaj. Izraz (6.6) predstavlja parcijalnu diferencijalnu jednadžbu s varijabilnim koeficijentima ($\alpha(s)$, $r(s)$, $h_p(s)$) i čije je rješenje [47]

$$u_s = \frac{r}{r_M} u_M + \frac{y_M - y}{r_M} v_p' - r \int_0^s w_p' \frac{\cos\alpha}{r^2} ds - r \int_0^s \alpha_p' \frac{h_p}{r^2} ds \quad (6.9)$$

gdje je u_M pomak u smjeru osi x ishodišne točke M , za koju vrijedi

$$r_M = R + y_M \quad (6.10)$$

Ako se težište poprečnog presjeka ne nalazi na srednjoj liniji poprečnog presjeka, obodni pomak težišta se ne može odrediti jer tada integracijska putanja (engl. *integration route*) ne prolazi kroz težište. U tom je slučaju potrebno koristiti prosječni pomak poprečnog presjeka u smjeru x osi u_{avg} , definiran kao

$$u_{avg} = \frac{1}{A} \int_A u_s dA \quad (6.11)$$

gdje je A površina poprečnog presjeka i pri čemu je $dA = t ds$. Izraz (6.9) postaje

$$u_s = \frac{r}{R} u_{avg} - \frac{x}{R} v_P' - r \frac{D_z}{R^2} w_P' - r \frac{D_\omega}{R^2} h_P' \quad (6.12)$$

gdje su D_z i D_ω geometrijske karakteristike zakrivljenog štapa tankostjenog otvorenog poprečnog presjeka definirane kao

$$D_z = \int_0^s \frac{R^2}{r^2} \cos \alpha ds - \frac{1}{A} \int_A \frac{r}{R} \int_0^s \frac{R^2}{r^2} \cos \alpha ds dA \quad (6.13)$$

$$D_\omega = \int_0^s \frac{R^2}{r^2} h_P ds - \frac{1}{A} \int_A \frac{r}{R} \int_0^s \frac{R^2}{r^2} h_P ds dA$$

a koje moraju, prema [47], zadovoljiti uvjete

$$\int_A D_z \frac{r}{R} dA = \int_A D_\omega \frac{r}{R} dA = 0 \quad (6.14)$$

Duljinska deformacija vlakna rotacijske ljuske ε_x , je sada definirana kao

$$\varepsilon_x = \frac{v_s}{r} + \frac{\partial u_s}{r \partial \phi} = \frac{u_{avg}' - v_P''}{R} + \frac{v_P - v_P''}{r} \quad (6.15)$$

$$- \frac{z - a_z}{r} \alpha_P - \frac{D_z}{R^2} w_P'' - \frac{D_\omega}{R^2} \alpha_P''$$

a odgovarajuće normalno naprezanje σ_x , nakon primjene treće pretpostavke, je

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (6.16)$$

gdje je E modul elastičnosti.

Kako je u prethodnom izrazu definirano normalno naprezanje, mogu se definirati sljedeće unutarnje sile u koordinatnom sustavu $Oxyz$ poprečnog presjeka:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x dA = EC_0(v_P - v_P'') + \frac{EA}{R}(u_{avg}' - v_P'') \\ &\quad - E(C_z - a_z C_0)\alpha_P - E \frac{C_{vN}}{R^2} w_P'' - E \frac{C_{\alpha PN}}{R^2} \alpha_P'' \\ M_z &= - \int_A \sigma_x y dA = -EC_y(v_P - v_P'') \\ &\quad - E(RC_z + a_z C_y)\alpha_P - E \frac{C_{vN}}{R} w_P'' - E \frac{C_{\alpha PN}}{R} \alpha_P'' \\ M_y &= \int_A \sigma_x z dA = EC_z(v_P - v_P'') \\ &\quad - E(C_{zz} - a_z C_z)\alpha_P - E \frac{C_{vy}}{R} w_P'' - E \frac{C_{\alpha Py}}{R} \alpha_P'' \\ B &= \int_A \sigma_x \omega dA = EC_\omega(v_P - v_P'') - \\ &\quad E(C_{z\omega} - a_z C_\omega)\alpha_P - E \frac{C_{v\omega}}{R} w_P'' - E \frac{C_{\alpha P\omega}}{R} \alpha_P'' \end{aligned} \quad (6.17)$$

gdje su geometrijske karakteristike zakrivljenog štapa definirane kao

$$\begin{aligned} C_0 &= \int_A \frac{1}{r} dA; C_y = \int_A \frac{y}{r} dA; C_z = \int_A \frac{z}{r} dA \\ C_\omega &= \int_A \frac{\omega}{r} dA; C_{zz} = \int_A \frac{z^2}{r} dA; C_{z\omega} = \int_A \frac{z\omega}{r} dA \\ C_{vN} &= \int_A D_z dA; C_{\alpha PN} = \int_A D_\omega dA; C_{vy} = \int_A z D_z dA \\ C_{\alpha Py} &= \int_A z D_\omega dA; C_{v\omega} = \int_A \omega D_z dA; C_{\alpha P\omega} = \int_A \omega D_\omega dA \end{aligned} \quad (6.18)$$

Usporedbom izraza (5.17) i (6.17) se može vidjeti da su sve unutrašnje sile, definirane izrazom (6.17), funkcije kuta uvijanja α_P i pomaka u ravnini poprečnog presjeka, v_P i w_P . Prosječni obodni pomak u_{avg} se pojavljuje samo u izrazu za silu N . Geometrijske karakteristike definirane izrazom (6.18) u obzir uzimaju zakrivljenosti štapa, a što nije slučaj u metodama koje se temelje na analogiji izraza između ravnih i zakrivljenih štapova.

Tok posmičnih sila q (engl. *shear flow*) je također prikazan na slici 6.1.b te je pozitivan ako je usmjeren u smjeru prirasta krivocrtne koordinate s , a može se odrediti iz uvjeta ravnoteže rotacijske ljske

$$r \frac{\partial \sigma_x t}{\partial \phi} + r \frac{\partial q}{\partial s} - 2q \sin \alpha = 0 \quad (6.19)$$

Prethodni izraz je također parcijalna diferencijalna jednačba s varijabilnim koeficijentima te se tok posmičnih sila q ne može odrediti direktnom integracijom. Ako se slobodni kraj B uzme kao početna točka integracije, rješenje prethodne diferencijalne jednačbe je

$$q = -\frac{E(u_{avg}'' - v_P''')}{Rr^2} (RA_s + S_{zs}) - \frac{EA_s(v_P' + v_P''')}{r^2} + \frac{E(S_{ys} - a_z A_s)}{r^2} \alpha_P' + \frac{EF_z}{R^2 r^2} w_P''' + \frac{EF_\omega}{R^2 r^2} \alpha_P''' \quad (6.20)$$

gdje su geometrijske karakteristike zakrivljenog štapa otvorenog tankostjenog poprečnog presjeka definirane kao

$$A_s = \int_B^s t ds; S_{zs} = \int_B^s y t ds; S_{ys} = \int_B^s z t ds$$

$$F_z = \int_B^s r D_z t ds; F_\omega = \int_B^s r D_\omega t ds \quad (6.21)$$

Kako je u izrazu (6.20) definiran tok posmičnih sila q , preostale unutarnje sile tankostjenog zakrivljenog štapa se mogu definirati kao

$$Q_y = - \int_B^E q \sin \alpha ds = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} \int_B^E \sigma_x y t ds = - \frac{M'_z}{R} \quad (6.22)$$

$$Q_z = Q_{z1} + Q_{z2}$$

$$M_p = M_\omega + M_t$$

gdje vrijedi

$$Q_{z1} = - \int_B^E q \cos \alpha ds = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} \int_B^E \sigma_x D_z \frac{r}{R} ds = \frac{H'_w}{R} \quad (6.23)$$

$$Q_{z2} = - \frac{M_t}{R_p}$$

i

$$M_\omega = \int_B^E q h_p ds = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} \int_B^E \sigma_x D_\omega \frac{r}{R} ds = \frac{H'_\omega}{R} \quad (6.24)$$

$$M_t = G I_t' \frac{(R + a_y) \alpha_p' - w_p'}{R^2}$$

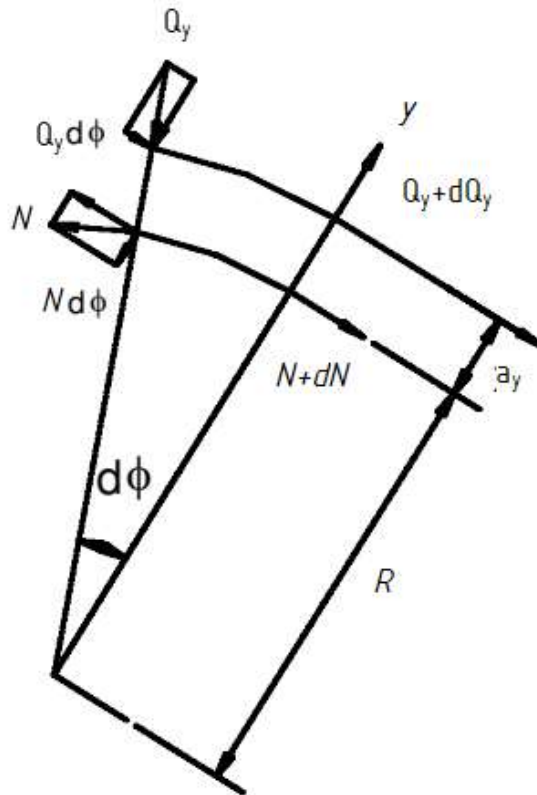
Q_{z1} je poprečna sila u smjeru z osi i i ona je posljedica djelovanja toka posmičnih sila q u poprečnom presjeku. Q_{z2} je poprečna sila u smjeru osi z , čija je svrha zadovoljenje uvjeta ravnoteže momenata uvijanja. R_p je polumjer zakrivljenosti osi smicanja (linija koja spaja polove). H_w se može smatrati kao moment koji opisuje savijanje izvan ravnine zakrivljenosti, a H_ω kao bimoment zakrivljenog tankostjenog štapa. I_t' je torzijski moment tromosti tankostjenog zakrivljenog štapa otvorenog poprečnog presjeka. Ove su veličine definirane kao

$$I_t' = \frac{1}{3} \int_A \frac{R^2}{r^2} t^2 dA$$

$$H_w = \int_A \sigma_x D_z \frac{r}{R} dA \quad (6.25)$$

$$H_\omega = \int_A \sigma_x D_\omega \frac{r}{R} dA$$

U ovoj je metodi u obzir uzet relativni položaj glavnog pola P u odnosu na težište poprečnog presjeka T . Uzevši u obzir sliku 3.7, gdje su momenti savijanja i uzdužna sila ravnog štapa definirani u odnosu na težište poprečnog presjeka, a preostale unutrašnje sile u odnosu na glavni pol, na slici 6.2 je prikazan tlocrt zakrivljene težišne linije i zakrivljene osi smicanja s pripadnim unutrašnjim silama.



Slika 6.2. Tlocrt težišne linije i osi smicanja zakrivljenog štapa [47]

Jednadžbe ravnoteže tada glase

$$\begin{aligned}
 M_z'' + RN &= q_y(R + a_y)R \\
 RN' - M_z' &= -q_x R^2 \\
 RM_y'' - RM_p' - a_z M_z'' &= -q_z R(R + a_y)^2 \\
 M_p' + M_y - a_z N &= -m_p(R + a_y)
 \end{aligned}
 \tag{6.26}$$

gdje su a_y i a_z pravokutne koordinate glavnog pola P poprečnog presjeka.

Treba imati na umu da se u ovoj metodi derivacije članova odnose na varijablu obuhvatnog kuta ϕ , što je pokazano u izrazu (6.8). U ostalim metodama, a koje su opisane u ovom radu i koje se odnose na analizu tankostjenih zakrivljenih štapova, derivacije članova se odnose na krivocrtnu koordinatu koja definira položaj razmatranog poprečnog presjeka. Ove dvije varijable su spregnute izrazom (5.4). Kod poprečnog presjeka s dvije osi simetrije vrijedi

$$a_y = a_z = 0 \quad (6.27)$$

Eliminiranjem sile N u prve dvije jednadžbe izraza (6.26), te primjenom izraza (5.4) i (6.27), slijedi izraz (5.7). Izraz (6.26) se također može pojednostavniti ako poprečni presjek ima jednu os simetrije, zanemarivanjem člana a_y ili a_z .

Normalno naprezanje u ovoj metodi, definirano izrazom (6.16), nije izraženo pomoću unutrašnjih sila. Temeljne jednadžbe ovog pristupa slijede primjenom izraza (6.17), (6.22) i (6.26) te su u pojednostavljenom obliku dane u [47]. Ove temeljne jednadžbe se mogu riješiti analitički uz poznate rubne uvjete, a veličine pomoću kojih se definiraju rubni uvjeti su dane u Tablici 6.1.

Ako poprečni presjek ima dvije osi simetrije, rješenja ove metode se malo razlikuju od postupka predloženog u [2] (opisan u prethodnom poglavlju). Ako poprečni presjek nije simetričan, tada su svi pomaci i zakret poprečnog presjeka spregnuti. U slučaju da poprečni presjek ima jednu os simetrije, spregnutost pomaka i kuta uvijanja ovisi o obliku poprečnog presjeka i rubnim uvjetima [47].

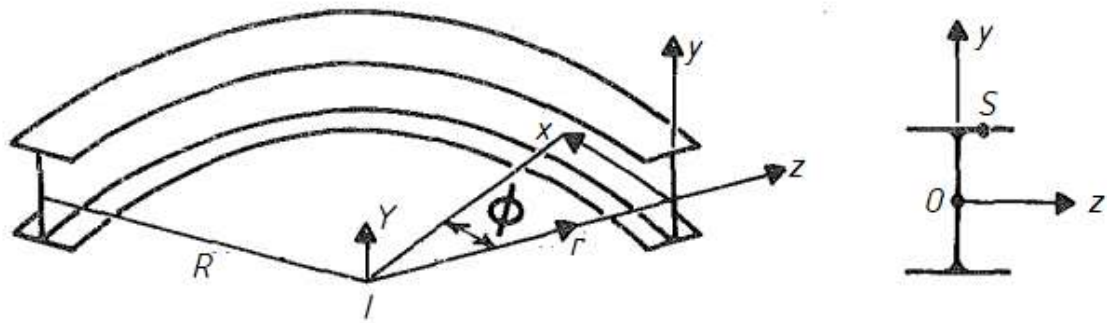
Tablica 6.1. Veličine pomoću koji se definiraju rubni uvjeti [47]

za pomake	za sile
u	$N - M_z/R$
v_p	$Q_y = -M'_z/R$
w_p	$Q_z = H'_w/R - T_{sv}/R$
v'_p/R	M_z
w'_p/R	$-H_w$
α_p	$M_p = H'_\omega/R + T_{sv}$
α'_p/R	H_ω

Prethodno pokazani pristup je također korišten u analizi tankostjenih zakrivljenih štapova otvorenog poprečnog presjeka i konstantnog polumjera zakrivljenosti, a gdje je poprečni presjek proizvoljan i sastavljen od ravnih segmenata (engl. *folded plated profiles*) [48].

6.2. Analiza tankostjenog uzdužno zakrivljenog I profila

Metoda predložena u [49] se temelji na rješavanju jednačbi teorije elastičnosti iskazanih u cilindričnom koordinatnom sustavu, a ograničena je na zakrivljene I ili H profile. U ovoj metodi pri izvodu temeljnih jednačbi nije spomenut karakter poprečnog presjeka, no ova je metoda u [49] primijenjena u analizi poprečnog presjeka s dvije osi simetrije. U [47, 50] je spomenuto da je primjena ovog postupka ograničena na I ili H profile s dvije osi simetrije. Tankostjeni uzdužno zakrivljeni I profil je prikazan na slici 6.3.



Slika 6.3. Tankostjeni uzdužno zakrivljeni I profil [49]

Pretpostavke korištene u ovoj analizi glase:

1. oblik poprečnog presjeka se ne mijenja tijekom deformiranja,
2. kutne deformacije u srednjoj plohi su jednake nuli,
3. materijal je linearno elastičan.

Koordinatni sustavi korišteni u ovoj analizi su:

1. $Oxyz$ je desni pravokutni Kartezijev koordinatni sustav poprečnog presjeka čije je ishodište u težištu,
2. $Ir\phi Y$ je cilindrični koordinatni sustav zakrivljenog štapa i čije je ishodište u središtu zakrivljenosti težišne linije.

Koordinatna os x je definirana u pravcu tangente na zakrivljenu težišnu liniju polumjera zakrivljenosti R i usmjerena je u smjeru prirasta kuta ϕ ; koordinatna os y je okomita na ravninu zakrivljenosti, a koordinatna os z je usmjerena kao i os r .

Cauchyjeve jednadžbe u cilindričnom koordinatnom tada glase

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{r\partial\phi} + \frac{w}{r} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{r\partial\phi} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \left(\frac{\partial w}{r\partial\phi} - \frac{u}{r}\right) + \frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}\tag{6.28}$$

gdje su u , v i w redom pomaci proizvoljne točke S srednje plohe u smjeru x , y i z osi, to jest u je obodni pomak. γ_{xy} i γ_{xz} su kutne deformacije, a ε_x je duljinska deformacija.

Ako se u obzir uzmu odnosi

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{x}{R} \\ r &= R + z\end{aligned}\tag{6.29}$$

izraz (6.28) prelazi u

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R}\right) \frac{R}{R+z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{R}{R+z} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{u}{R}\right) \frac{R}{R+z} + \frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}\tag{6.30}$$

Zbog prve pretpostavke su pomaci u ravnini poprečnog presjeka definirani kao

$$\begin{aligned}v &= v_c - z\alpha_c \\ w &= w_c + y\alpha_c\end{aligned}\tag{6.31}$$

gdje su v_c i w_c redom pomaci težišta poprečnog presjeka u smjeru y i z osi, a α_c je kut uvijanja konture poprečnog presjeka oko težišta poprečnog presjeka.

Zbog druge se pretpostavke, prema [49], može definirati jednadžba koja opisuje pretpostavku nepostojanja kutnih deformacija u srednjoj plohi u obliku

$$\gamma_{xy} \frac{\partial v}{\partial s} + \gamma_{xz} \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad (6.32)$$

gdje je s krivocrtna koordinata poprečnog presjeka. Prethodni izraz uvrštavanjem izraza (6.30) i (6.31) prelazi u

$$\begin{aligned} \frac{d(u + yv'_c)}{ds} + \left[w'_c - \frac{1}{R}(u + yv'_c) \right] + \frac{R}{R+z} \frac{dz}{ds} \\ + \left(\alpha'_c + \frac{v_c}{R} \right) \frac{R}{R+z} \frac{d\omega}{ds} = 0 \end{aligned} \quad (6.33)$$

gdje je sektorska koordinata ω , sada definirana kao

$$\omega = \int (y dz - z dy) \quad (6.34)$$

pri čemu je

$$(\quad)' = \frac{d}{dx} \quad (6.35)$$

Izraz (6.33) se može zapisati u obliku

$$\left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{df}{ds} - \frac{f}{R} \frac{dz}{ds} + \frac{dg}{ds} = 0 \quad (6.36)$$

gdje je

$$f = u + yv'_c + zw'_c \quad (6.37)$$

i

$$g = \omega \left(\alpha'_c + \frac{v'_c}{R} \right) \quad (6.38)$$

Za vertikalni dio poprečnog presjeka sa slike 6.3, to jest rebro ili struk (engl. *web*), vrijedi

$$z = \omega = dz = dg = 0 \quad (6.39)$$

te izraz (6.36) prelazi u

$$\left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{df}{ds} = 0 \quad (6.40)$$

i čije je rješenje

$$f = c_1 = \text{konst.} \quad (6.41)$$

Zbog izraza (6.37) se prethodni izraz može zapisati kao

$$u = c_1 - yv'_C - zw'_C \quad (6.42)$$

a kako u težištu poprečnog presjeka vrijedi

$$y = z = 0 \quad (6.43)$$

konstanta integracije c_1 glasi

$$u_C = c_1 \quad (6.44)$$

gdje je u_C pomak težišta u smjeru osi x , to jest obodni pomak.

Sukladno navedenom, obodni pomak proizvoljne točke rebra u je definiran kao

$$u = u_C - yv'_C - zw'_C \quad (6.45)$$

Za horizontalni dio poprečnog presjeka sa slike 6.3, to jest pojas (engl. *flange*), vrijedi

$$dy = 0 \quad (6.46)$$

$$d\omega = y dz$$

te izraz (6.36) prelazi u

$$\left(1 + \frac{z}{R}\right) \frac{df}{dz} - \frac{f}{R} \frac{dz}{ds} + \left(\alpha_{P'} + \frac{v'_P}{R}\right) y \frac{dz}{ds} = 0 \quad (6.47)$$

i čije je rješenje

$$f = yR \left(\alpha_c' + \frac{v_c'}{R} \right) + c_2(R + z) \quad (6.48)$$

Prethodni izraz zbog izraza (6.37) prelazi u

$$u = -yv_c' - zw_c' + yR \left(\alpha_p' + \frac{v_c'}{R} \right) + c_2(R + z) \quad (6.49)$$

Konstanta integracije c_2 se može odrediti iz uvjeta kontinuiteta pomaka [49]: obodni pomak pojasa i obodni pomak rebra moraju biti jednaki u točki poprečnog presjeka gdje se spajaju pojas i rebro.

Neka su koordinate točke gdje se spajaju pojas i rebro

$$y = \bar{y} \quad (6.50)$$

$$z = 0$$

te izjednačavanjem izraza (6.45) i (6.49) za dane koordinate, konstanta integracije c_2 iznosi

$$c_2 = \frac{u_c}{R} - \bar{y} \left(\alpha_c' + \frac{v_c'}{R} \right) \quad (6.51)$$

a kako je vrijednost \bar{y} proizvoljna, izraz (6.49) prelazi u

$$u = u_c - yv_c' - z \left(w_c' - \frac{u_c}{R} \right) - \omega \left(\alpha_c' + \frac{v_c'}{R} \right) \quad (6.52)$$

Prethodno izvedeno polje pomaka zadovoljava izraz (6.1). Izraz (6.12), pri analizi zakrivljenog I profila s dvije osi simetrije, prelazi u izraz (6.52) [47].

Ako je rebro poprečnog presjeka horizontalno, analognim se postupkom može definirati obodni pomak H profila, te glasi

$$u = u_c - yv_c' - z \left(w_c' - \frac{u_c}{R} \right) - \omega \frac{R}{R + z} \left(\alpha_c' + \frac{v_c'}{R} \right) \quad (6.53)$$

Kada polumjer zakrivljenosti teži u beskonačnost, prethodna dva izraza formalno prelaze u izraz (3.6) tankostjenog ravnog štapa. Analiza dana u nastavku teksta se odnosi na izraz (6.52), to jest na poprečni presjek prikazan na slici 6.3.

Obodni pomak u ove metode, kao i svi izrazi koji slijede iz njega, ovise o obliku poprečnog presjeka. Duljinska deformacija ε_x , slijedi iz izraza (6.30), (6.31) i (6.52) te glasi

$$\varepsilon_x = \left[\left(u'_c + \frac{w_c}{R} \right) - y \left(v''_c - \frac{\alpha_c}{R} \right) - z \left(w''_c - \frac{u'_c}{R} \right) - \omega \left(\alpha_c'' + \frac{v''_c}{R} \right) \right] \frac{R}{R+z} \quad (6.54)$$

Normalno naprezanje σ_x , slijedi iz Hookeovog zakona primjenom treće pretpostavke

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (6.55)$$

te unutrašnje sile štapa prikazanog na slici 6.3 u ovoj metodi [49] glase

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x dA \cong AE \left(u'_c + \frac{w_c}{R} \right) + \frac{EI_y}{R} \left(w''_c - \frac{u'_c}{R} \right) \\ M_y &= \int_A \sigma_x z dA \cong -EI_y \left(w''_c + \frac{w_c}{R} \right) \\ M_z &= - \int_A \sigma_x y dA \cong EI_z \left(v''_c - \frac{\alpha_c}{R} \right) - \frac{EI_\omega}{R} \left(\alpha_c'' + \frac{v''_c}{R} \right) \\ B &= - \int_A \sigma_x \omega dA \cong EI_\omega \left(\alpha_c'' + \frac{\alpha_c}{R^2} \right) \end{aligned} \quad (6.56)$$

gdje su prilikom integriranja zanemarene veličine višeg reda.

Formalnom usporedbom izraza (6.56) i izraza (5.17) se može zaključiti da analogija odnosa unutarinja sila – pomak između ravnih i zakrivljenih tankostjenih štapova nije u potpunosti opravdana [49].

U ovoj metodi nisu određena posmična naprezanja (τ_{xy} i τ_{xz}) u srednjoj plohi, a iz kojih se mogu odrediti poprečne sile i moment izvitoperenja pomoću izraza

$$M_\omega = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA$$

$$Q_y = \int_A \tau_{xy} dA$$

$$Q_z = \int_A \tau_{xz} dA$$
(6.57)

Geometrijske karakteristike poprečnog presjeka korištene u ovoj metodi su jednake geometrijskim karakteristikama ravnog tankostjenog štapa (izrazi (3.16) i (3.17)) te glase

$$A = \int_A dA$$

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA$$
(6.58)

Poopćene deformacije tankostjenog zakrivljenog I profila se primjenom izraza (6.56) mogu zapisati u obliku

$$u'_c + \frac{w_c}{R} \cong \frac{1}{E} \left(\frac{N}{A} + \frac{M_y}{RA} \right)$$

$$w''_c - \frac{u'_c}{R} \cong -\frac{1}{E} \left(\frac{M_y}{I_y} + \frac{N}{RA} \right)$$

$$v''_c - \frac{\alpha_c}{R} \cong \frac{1}{E} \left(\frac{M_z}{I_z} + \frac{B}{RI_z} \right)$$

$$\alpha_c'' + \frac{v''_c}{R} \cong \frac{1}{E} \left(\frac{M_z}{RI_z} + \frac{B}{I_\omega} \right)$$
(6.59)

gdje su članovi koji sadrže koeficijent $1 / R^2$ zanemareni. Prve dvije jednadžbe izraza (6.59) opisuju spregnutost pomaka u ravnini zakrivljenosti, u_C i w_C , a zadnje dvije jednadžbe opisuju spregnutost kuta uvijanja α_C i pomaka izvan ravnine zakrivljenosti v_C .

Izraz (6.55) za normalno naprezanje primjenom prethodnog izraza prelazi u

$$\sigma = \left[\frac{N}{A} + \frac{M_y}{RA} - y \left(\frac{M_z}{I_z} + \frac{B}{RI_z} \right) + z \left(\frac{M_y}{I_y} + \frac{N}{RA} \right) - \omega \left(\frac{B}{I_\omega} + \frac{M_z}{RI_z} \right) \right] \frac{R}{R+z} \quad (6.60)$$

Kada polumjer zakrivljenosti težišne linije R teži u beskonačnost, prethodni izraz formalno prelazi u izraz za naprezanje tankostjenog ravnog štapa, izraz (3.30). Formalnom usporedbom prethodnog izraza i izraza (5.20) se može kazati da analogija izraza za naprezanje između ravnih i zakrivljenih tankostjenih štapova nije opravdana [49].

Ova metoda je razvijena s ciljem ispitivanja stabilnosti tankostjenog zakrivljenog štapa otvorenog poprečnog presjeka prikazanog na slici 6.3, te nije primijenjena u analizi rastezanja/sabijanja, savijanja i uvijanja zakrivljenih tankostjenih štapova. U jednadžbama ravnoteže, koje su definirane izrazom (5.7), nije uključen utjecaj relativnog položaja glavnog pola P u odnosu na težište T poprečnog presjeka. Kako je u ovoj metodi zanemaren relativni položaj glavnog pola u odnosu na težište poprečnog presjeka, temeljna jednadžba ove metode slijedi formalnom primjenom druge jednadžbe izraza (6.56) u prvu jednadžbu izraza (5.7). Ova temeljna jednadžba uzdužno zakrivljenog I profila je formalno identična prvoj jednadžbi u izrazu (5.18), a koja opisuje savijanje zakrivljenog štapa u ravnini zakrivljenosti. Kako su obodne sile N u izrazima (6.56) i (5.17) formalno različite, rješenja ovih temeljnih jednadžbi će se razlikovati. Kako moment uvijanja M_p nije definiran, nije moguće odrediti temeljne jednadžbe koje se odnose na uvijanje i savijanje izvan ravnine zakrivljenosti tankostjenog zakrivljenog štapa prikazanog na slici 6.3.

U [51] su za prethodno opisanu metodu predložene sljedeće geometrijske karakteristike

$$\begin{aligned}
 A' &= \int_A \frac{R}{R+z} dA \\
 I_{y'} &= \int_A z^2 \frac{R}{R+z} dA \\
 I_{z'} &= \int_A y^2 \frac{R}{R+z} dA \\
 I_{\omega'} &= \int_A \omega^2 \frac{R}{R+z} dA
 \end{aligned}
 \tag{6.61}$$

gdje je A' površina poprečnog presjeka zakrivljenog štapa, $I_{y'}$ i $I_{z'}$ su aksijalni momenti tromosti zakrivljenog štapa u odnosu na os y i z , a $I_{\omega'}$ je sektorski moment tromosti zakrivljenog štapa. Kada polumjer zakrivljenosti težišne linije teži u beskonačnost, prethodno dane geometrijske karakteristike poprečnog presjeka zakrivljenog štapa prelaze u izraz (6.58), to jest u geometrijske karakteristike ravnog tankostjenog štapa.

U [52] je primjenom uzastopnih aproksimacija (engl. *successive approximations*) nad uvjetom ravnoteže odsječka stijenke uključen utjecaj kutne deformacije srednje plohe u analizu tankostjenog zakrivljenog štapa. Za uzdužni, to jest obodni pomak, ovog postupka vrijedi:

1. kada se zanemare članovi koji se odnose na kutnu deformaciju, tada uzdužni pomak ovog postupka formalno prelazi u izraz (6.52) za uzdužno zakrivljeni I profil,
2. kada polumjer zakrivljenosti težišne linije teži u beskonačnost, tada uzdužni pomak ovog postupka ne prelazi u analogni izraz teorije savijanja i uvijanja ravnog tankostjenog štapa s utjecajem smicanja.

Prethodno je dan kratki uvod u analizu tankostjenih zakrivljenih štapova otvorenog poprečnog presjeka. U nastavku teksta je dan kratki pregled klasičnih teorija korištenih u analizi zakrivljenih štapova. Temeljne jednačbe teorije elastičnosti za ljuske velikih zakrivljenosti (engl. *deep shells*) su korištene u [53] pri analizi kompozitnog zakrivljenog štapa pravokutnog poprečnog presjeka opterećenog u ravnini zakrivljenosti. Pri izvodu temeljnih jednačbi su zanemareni svi članovi koji se odnose na koordinatnu os okomitu na ravninu zakrivljenosti, a mjere deformacija su određene primjenom Euler – Bernoullijevih i Timošenkovih pretpostavki. Mjere deformacije dane u [53] se razlikuju od analognih mjera deformacija izraza (6.59), a također su korištene u analizi zakrivljenog izotropnog štapa opterećenog u ravnini zakrivljenosti u [54].

U [55] je numerički i analitički analizirano savijanje izvan ravnine zakrivljenosti i uvijanje zakrivljenog štapa punog kružnog poprečnog presjeka na temelju pretpostavki Euler – Bernoullijeve i Timošenkove teorije, pri čemu je zanemareno izvitoperenje poprečnog presjeka. U [56] je Saint – Venantova teorija proširena na zakrivljene anizotropne štapove pomoću jednačbi teorije elastičnosti iskazanih u cilindričnom koordinatnom sustavu, a pri čemu je zanemaren utjecaj ograničenog izvitoperenja poprečnog presjeka.

ZAKLJUČAK

Kada polumjer zakrivljenosti težišne linije teži u beskonačnost, zakrivljeni štap prelazi u ravni štap te izrazi zakrivljenog štapa prelaze u izraze za ravne štapove. Ako se derivacije fizikalnih veličina izraze po krivocrtnoj varijabli duljine zakrivljenog štapa l , tada je jednostavan prijelaz izraza zakrivljenih štapova u izraze ravnih štapova. Ako su derivacije fizikalnih veličina izražene po varijabli obuhvatnog kuta ϕ , tada prijelaz izraza iz zakrivljenih u ravne štapove nije jednostavan.

Analitička metoda za analizu tankostjenih zakrivljenih štapova otvorenog poprečnog presjeka u kojoj je analiza ograničena na srednju plohu štapa i u kojoj je kutna deformacija srednje plohe uzeta u obzir mora zadovoljiti sljedeće uvjete:

1. kada polumjer zakrivljenosti teži u beskonačnost, tada temeljni izrazi ove metode moraju prelaziti u izraze teorije savijanja i uvijanja tankostjenih ravnih štapova s utjecajem smicanja [1],
2. kada se zanemari utjecaj smicanja, tada temeljni izrazi ove metode moraju prelaziti u izraze temeljnog postupka korištenog pri analizi tankostjenih zakrivljenih štapova.

LITERATURA

- [1] Pavazza, R.: "Uvod u analizu tankostjenih štapova", Kigen, Zagreb, 2007.
- [2] Vlasov, V. Z.: "Thin-Walled Elastic Beams, Second Edition", Israel Program for Scientific Translations, Jeruzalem, 1963.
- [3] Silvestre, N.; Camotim, D.: "On the mechanics of distortion in thin-walled open sections", Thin-Walled Structures, Vol. 48, No. 7, pp. 469-481, 2010.
- [4] Yanze, L. i dr.: "Theoretical and experimental analysis of thin-walled curved rectangular box beam under in-plane bending", Scanning, Vol. 2021, pp. 1-19, 2021.
- [5] Jecić, S.; Semenski, D.: "Jednadžbe teorije elastičnosti", Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2001.
- [6] Kostrenčić, Z.: "Teorija elastičnosti", Školska knjiga, Zagreb, 1982.
- [7] Timoshenko, S.; Goodier, J. N.: "Theory of Elasticity, Second Edition", McGraw – Hill, New York, 1951.
- [8] Kılıç, O.; Aktaş, A.: "Determination of Stress Functions of a Curved Beam Subjected to an Arbitrarily Directed Single Force at the Free End", Mathematical and Computational Applications, Vol. 7, No. 2, pp. 181-188, 2002.
- [9] Tutuncu, N.: "Plane Stress Analysis of End-Loaded Orthotropic Curved Beams of Constant Thickness With Applications to Full Rings", Journal of Mechanical Design, Vol. 120, No. 2, pp. 368-374, 1998.
- [10] Chianese, R. B.; Erdlac, R. J.: "The general solution to the distribution of stresses in a circular ring compressed by two forces acting along a diameter", The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 41, No. 2, pp. 239-247, 1988.
- [11] Abramovich, H.: "Stability and Vibrations of Thin-Walled Composite Structures", Woodhead Publishing, 2017.
- [12] Pilkey, W. D.: "Analysis and Design of Elastic Beams: Computational", Wiley, 2002.

- [13] Kim, N. I.; Kim, M. Y.: “Thin-walled curved beam theory based on centroid-shear center formulation“, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 19, No. 2, pp. 589–604, 2005.
- [14] Kim, N. I.; Jeon, C. K.: “Improved Thin-Walled Finite Curved Beam Elements“, *Advances in Mechanical Engineering*, Vol. 5, 2013.
- [15] Piovan, M. T.; Cortínez, V. H.: “Mechanics of thin-walled curved beams made of composite materials, allowing for shear deformability“, *Thin-Walled Structures*, Vol. 45, No. 9, pp. 759-789, 2007.
- [16] Lezgy-Nazargah, M.: “A finite element model for static analysis of curved thin-walled beams based on the concept of equivalent layered composite cross section“, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, pp. 1-14, 2020.
- [17] Tsiptsis, I. N.; Sapountzakis, E. J.: “Generalized warping and distortional analysis of curved beams with isogeometric methods“, *Computers & Structures*, Vol. 191, pp. 33-50, 2017.
- [18] Cazzani, A. i dr.: “Constitutive models for strongly curved beams in the frame of isogeometric analysis“, *Mathematics and Mechanics of Solids*, Vol. 21, No. 2, pp. 182-209, 2015.
- [19] Cazzani, A.; Malagù M.; Camotim D.: “Isogeometric analysis of plane-curved beams“, *Mathematics and Mechanics of Solids*, Vol. 21, No. 5, pp. 562-577, 2016.
- [20] Cárdenas, D. i dr.: “Unified theory for curved composite thin-walled beams and its isogeometrical analysis“, *Thin-Walled Structures*, Vol. 131, pp. 838-854, 2018.
- [21] Nuno, P.: “Formulação linear da Teoria Generalizada de Vigas para barras de eixo curvo“, magistarski rad, A Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, 2015.
- [22] Peres, N.; Gonçalves R.; Turco E.: “First-order generalised beam theory for curved thin-walled members with circular axis“, *Thin-Walled Structures*, Vol. 107, pp. 345-361, 2016.

- [23] Peres, N.; Gonçalves R.; Camotim D.: "GBT-based cross-section deformation modes for curved thin-walled members with circular axis", *Thin-Walled Structures*, Vol. 127, pp. 769-780, 2018.
- [24] Carrera, E.; Giunta, G.: "Refined beam theories based on a unified formulation", *International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 02, No. 1, pp. 117-143, 2010.
- [25] Carrera, E.; Giunta, G.; Petrolo, M.: "Beam Structures: Classical and Advanced Theories", Wiley, 2011.
- [26] De Pietro, G. i dr.: "Strong and weak form solutions of curved beams via Carrera's unified formulation", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 27, No. 15, pp. 1342-1353, 2018.
- [27] Vukasović, M: "Pregled teorija savijanja i uvijanja štapova punih i tankostjenih presjeka", kvalifikacijski doktorski ispit, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogranje, Sveučilište u Splitu, 2012.
- [28] Matoković, A: "Savijanje i uvijanje štapova otvorenog tankostjenog presjeka s utjecajem smicanja", doktorska disertacija, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogranje, Sveučilište u Splitu, 2012.
- [29] Wang, C. M.; Reddy, J. N.; Lee, K. H.: "Shear Deformable Beams and Plates: Relationships with Classical Solutions", Elsevier Science, 2011.
- [30] Craig, R. R.: "Mechanics of Materials", John Wiley & Sons, New York, 2000.
- [31] Alfirević, I.: "Nauka o čvrstoći I", Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.
- [32] Šimić, D.: "Teorija tankostjenih nosača otvorenog poprečnog presjeka", Građevinski fakultet, Zagreb, 2008.
- [33] Hoogenboom PCJ.: "Vlasov Torsion Theory", s Interneta, http://homepage.tudelft.nl/p3r3s/b16_chap7.pdf, 31. kolovoza 2021.
- [34] Vukasović, M: "Savijanje i uvijanje tankostjenih kompozitnih štapova otvorenog poprečnog presjeka", doktorska disertacija, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogranje, Sveučilište u Splitu, 2014.

- [35] Pavazza, R.: "Energijske metode: uvod u strukturnu analizu", Element, Zagreb, 2018.
- [36] Barber, R. J.: "Intermediate Mechanics of Materials, Second Edition", Springer, 2010.
- [37] Brnić, J.; Turkalj, G.: "Nauka o čvrstoći II" ZIGO, Rijeka, 2006.
- [38] Boswell, L.; Zhang, S.: "A box beam finite element for the elastic analysis of thin-walled structures", *Thin-Walled Structures*, Vol. 1, No. 4, pp. 353-383, 1983.
- [39] Boswell, L.; Zhang, S.: "The effect of distortion in thin-walled box-spine beams", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 20, No. 9-10, pp. 845-862, 1984.
- [40] Boswell, L.; Li, Q.: "Consideration of the relationships between torsion, distortion and warping of thin-walled beams", *Thin-Walled Structures*, Vol. 21, No. 2, pp. 147-161, 1955.
- [41] Flügge, W.: "Stresses in Shells (2nd ed.)", Springer Verlag, Berlin, 1973.
- [42] Afnani, A.; Erkmén, R.E.; Niki, V.: "An efficient formulation for thin-walled beams curved in plan", *International Journal of Steel Structures*, Vol. 17, No. 3, pp. 1087-1102, 2017.
- [43] Zeybek, Z.; Topkaya, C.; Rotter, J. M.: "Analysis of silo supporting ring beams resting on discrete supports", *Thin-Walled Structures*, Vol. 135, pp. 285-296, 2019.
- [44] Zeybek, Z.; Seçer, M.: "A design approach for the ring girder in elevated steel silos", *Thin-Walled Structures*, Vol. 157, 2020.
- [45] Krahula, J. H.: "Out of plane bending of a uniform circular ring", IABSE publications, 1965.
- [46] Timoshenko, S. P.; Gere, J. M.: "Theory of elastic stability (2nd ed.)", McGraw-Hill, 1961.
- [47] Tong, G.; Xu, Q.: "An Exact Theory for Curved Beams with Any Thin-Walled Open Sections", *Advances in Structural Engineering*, Vol. 5, No. 4, pp. 195 -209, 2002.
- [48] Tong, G.: "An exact theory of curved beams with open folded plated profiles", *Engineering Mechanics*, Vol. 14, No. 4, 1997.
- [49] Yang, Y.; Kuo, S.: "Static Stability of Curved Thin-Walled Beams", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 112, No. 8, pp. 821-841, 1986.

- [50] Trahair, N. S.; Papangelis, J. P.: "Flexural-Torsional Buckling of Monosymmetric Arches", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 113, No. 10, pp. 2271-2288, 1987.
- [51] Rajasekaran, S.; Sundararajan, T.; Srinivasa Rao, K.: Discussion of "Static Stability of Curved Thin-Walled Beams" by Yeong-Bin Yang and Shyh-Rong Kuo (Vol. 112, No. 8, 1986.), 1988.
- [52] Kano, T.; Usuki, S.; Hasebe, K.: "Theory of thin-walled curved members with shear deformation", *Ingenieur-Archiv*, Vol. 51, No. 5, pp. 325-336, 1982.
- [53] Qatu, M. S.: "Theories and analyses of thin and moderately thick laminated composite curved beams", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 30, No. 20, pp. 2743-2756, 1993.
- [54] Lim, C. W.; Wang, C. M.; Kitipornchai, S.: "Timoshenko curved beam bending solutions in terms of Euler-Bernoulli solutions", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 67, No. 3, pp. 179-190, 1997.
- [55] Kang, K.; Han, J.: "Analysis of a curved beam using classical and shear deformable beam theories", *KSME International Journal*, Vol. 12, No. 2, pp. 244-256, 1998.
- [56] Lekhnitskii, S.: "Torsion of an anisotropic curved bar", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 24, No. 3, pp. 633 - 639, 1960.

SAŽETAK

U radu su opisane klasične teorije savijanja (Euler – Bernoullijeva i Timošenkova teorija) i uvijanja (Coulombova i Saint – Venantova teorija) ravnih štapova, te je opisan koncept ograničenog izvitoperenja poprečnog presjeka, to jest ograničenog uvijanja ravnog štapa. Ako su dimenzije poprečnog presjeka male u odnosu na duljinu štapa, prethodno spomenute klasične teorije se mogu koristiti u analizi ravnih štapova tankostjenog zatvorenog i punog poprečnog presjeka.

Osim klasičnih teorija savijanja i uvijanja ravnih štapova, rad daje pregled teorija savijanja i ograničenog uvijanja tankostjenih ravnih štapova otvorenog poprečnog presjeka. U temeljnim jednadžbama ovih teorija su pomaci u smjeru glavnih koordinatnih osiju i kut uvijanja poprečnog presjeka raspregnuti.

Rad, također, opisuje postupak korišten u analizi savijanja debelostjenog zakrivljenog štapa i daje pregled metoda korištenih u analizi tankostjenih zakrivljenih štapova otvorenog poprečnog presjeka, a u kojima su temeljne jednadžbe određene uz primjenu izraza za ravne tankostjene štapove. Pokazano je da postoje samo dva slučaja opterećenja tankostjenih zakrivljenih štapova: opterećenje u ravnini zakrivljenosti i opterećenje izvan ravnine zakrivljenosti.

Na samom kraju ovoga rada su opisane metode koje analiziraju tankostjene zakrivljene štapove otvorenog poprečnog presjeka, a koje se temelje na jednadžbama teorije elastičnosti. Temeljne jednadžbe ovih metoda su određene na temelju pretpostavki teorija opisanih u trećem poglavlju. Ako poprečni presjek ima dvije osi simetrije i ako opterećenje djeluje u ravnini zakrivljenosti, tada su pomaci težišta u ravnini zakrivljenosti spregnuti; a ako opterećenje djeluje izvan ravnine zakrivljenosti, tada su kut uvijanja poprečnog presjeka oko težišta i pomak težišta okomito na ravninu zakrivljenosti spregnuti. Ako poprečni presjek uzdužno zakrivljenog štapa nije simetričan, tada su svi pomaci i kut uvijanja poprečnog presjeka spregnuti.