

SAVIJANJE TANKOSTJENIH KOMPOZITNIH ŠTAPOVA OTVORENOG POPREČNOG PRESJEKA



SEMINAR DOKTORANADA I POSLIJEDOKTORANADA

Marko Vukasović

Split, 2015.



SVEUČILIŠTE U SPLITU
—
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Sadržaj



1. Uvod
2. Savijanje tankostjenih kompozitnih štapova otvorenog poprečnog presjeka (STKŠ)
3. Analiza vertikalnih pomaka i srednjeg normalnog naprezanja pri savijanju
tankostjenih kompozitnih štapova otvorenog poprečnog presjeka
4. Zaključak

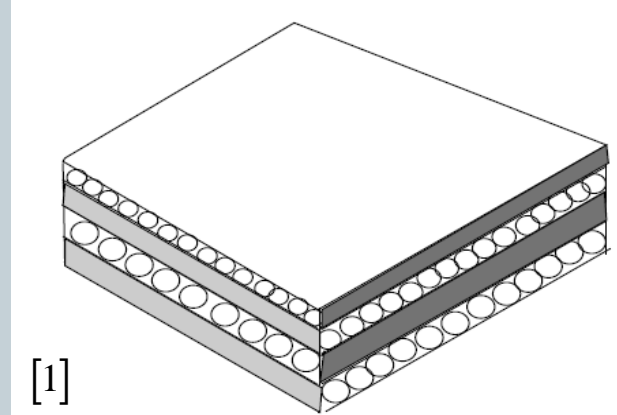
Uvod



Uvod u problematiku:

- Tankostjeni kompozitni štapovi
- Kompoziti (vlaknima-ojačani laminat)
- Analiza strukturnog ponašanja tankostjenih kompozitnih štapova otvorenog presjeka
- Razvoj analitičkog modela: uzima se u obzir utjecaj smicanja te ortotropija materijala
- Analiza pomaka i naprezanja kod savijanja i uvijanja tankostjenih kompozitnih štapova

otvorenog poprečnog presjeka

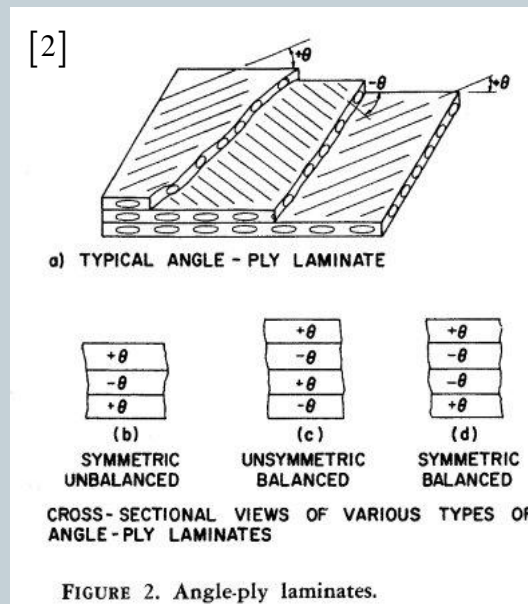
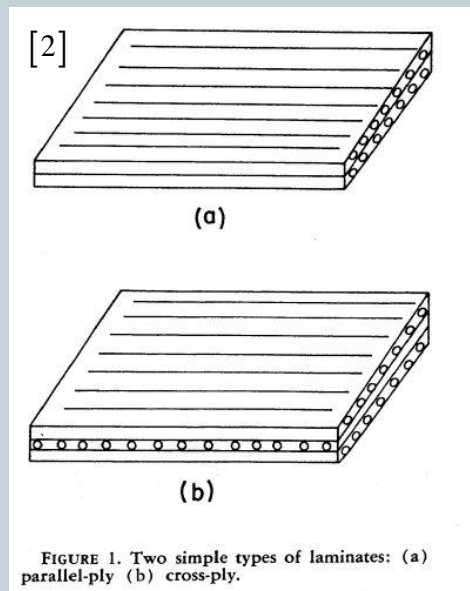


[1] E. Carrera: Mechanics of Multilayered Composite Structures: Basic Concepts and Advanced Theories, Draft of lectures given at CISM, UDINE, October 2012 in the framework of EU Socrates Program.

Savijanje tankostjenih kompozitnih štapova otvorenog poprečnog presjeka (STKŠ)

Definiranje konfiguracije laminata:

- simetrični, uravnoteženi laminati
- slojevi su ojačani jednosmjernim, kontinuiranim vlaknima (*unidirectional laminas*)
- laminati kod kojih su vlakna paralelna s uzdužnom osi (*unidirectional laminates*)
- laminati kod kojih su vlakna usmjerena pod kutovima 0° i 90° (*cross-ply laminates*)
- laminati kod kojih su vlakna usmjerena pod kutovima $+\theta^\circ$ i $-\theta^\circ$ (*angle-ply laminates*)



Savijanje tankostjenih kompozitnih štapova otvorenog poprečnog presjeka (STKŠ)

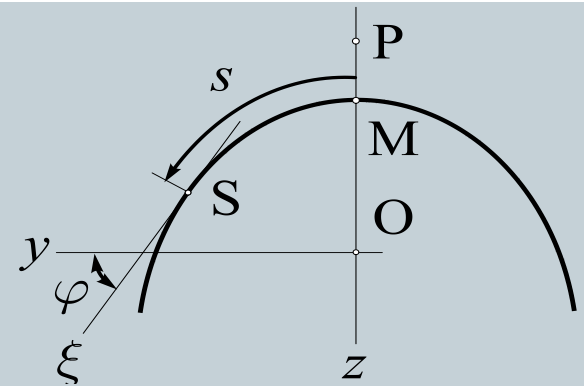
Pomaci i deformacija:

- Uzdužni pomak točke S srednje linije poprečnog presjeka:

$$u_s = -\frac{dw}{dx} z + u + \int_0^s \gamma_{x\xi} ds$$

- Duljinska deformacija u smjeru izvodnice srednje plohe:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{d^2 w}{dx^2} z + \frac{du}{dx} + \int_0^s \frac{\partial \gamma_{x\xi}}{\partial x} ds$$



Naprezanja:

- Konstitutivne jednačbe:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\xi \\ \tau_{x\xi} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\xi \\ \gamma_{x\xi} \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{x\xi} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^* & \bar{Q}_{16}^* \\ \bar{Q}_{16}^* & \bar{Q}_{66}^* \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{x\xi} \end{Bmatrix},$$

- za slučaj da je $\sigma_\xi^k = 0$:

$$\bar{Q}_{11}^* = \bar{Q}_{11} - \frac{\bar{Q}_{12}^2}{\bar{Q}_{22}}, \quad \bar{Q}_{16}^* = \bar{Q}_{16} - \frac{\bar{Q}_{12}\bar{Q}_{26}}{\bar{Q}_{22}}, \quad \bar{Q}_{66}^* = \bar{Q}_{66} - \frac{\bar{Q}_{26}^2}{\bar{Q}_{22}}$$

- za slučaj da je $\varepsilon_\xi = 0$:

$$\bar{Q}_{11}^* = \bar{Q}_{11}, \quad \bar{Q}_{16}^* = \bar{Q}_{16}, \quad \bar{Q}_{66}^* = \bar{Q}_{66}.$$

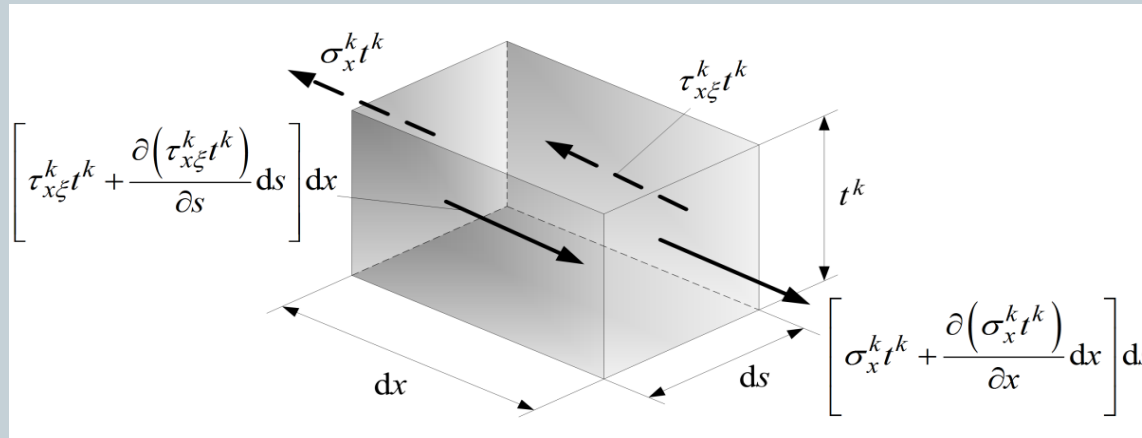
\bar{Q}_{ij} - transformirane reducirane krutosti

Savijanje tankostjenih kompozitnih štapova otvorenog poprečnog presjeka (STKŠ)

- Normalno naprezanje u k -tom sloju:

$$\sigma_x^k = \bar{Q}_{11}^* \left(-\frac{d^2 w}{dx^2} z + \frac{du}{dx} + \int_0^s \frac{\partial \gamma_{x\xi}}{\partial x} ds \right) + \bar{Q}_{16}^* \gamma_{x\xi}. \quad \begin{array}{l} k\text{-sloj laminata} \\ (k = 1, 2, \dots, N) \end{array}$$

- Iz jednadžbe ravnoteže odsjeka k -tog sloja slijedi tangencijalno naprezanje:



$$\tau_{x\xi}^k = -\frac{\bar{Q}_{11}^*}{t} \left(\frac{d^3 w}{dx^3} S_y^* - \frac{d^2 u}{dx^2} A^* \right) + \bar{Q}_{16}^* \int_0^{s^*} \frac{\partial \gamma_{x\xi}}{\partial x} ds^* + \frac{f^k}{t^k}, \quad \frac{f^k}{t^k} = -\bar{Q}_{16}^* \int_0^{s^*} \frac{\partial \gamma_{x\xi}}{\partial x} ds^* \Big|_{s^*=0}$$

$$S_y^* = \int_{s^*} z dA^*; \quad A^* = \int_{s^*} dA^*; \quad dA^* = t ds^*, \quad ds^* = -ds,$$

Savijanje tankostjenih kompozitnih štapova otvorenog poprečnog presjeka (STKŠ)

- Kutna deformacija u srednjoj plohi:

$$\gamma_{x\xi} \approx \frac{1}{t} \int_t \gamma_{x\xi} d\delta = k^\alpha \left(-\frac{d^3 w}{dx^3} \frac{S_y^*}{t} + \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{A^*}{t} \right), \quad \gamma_{x\xi} = \frac{\tau_{x\xi}^k}{\bar{Q}_{66}^*} - \frac{\bar{Q}_{16}^*}{\bar{Q}_{66}^*} \varepsilon_x, \quad \int_t \frac{\bar{Q}_{16}^*}{\bar{Q}_{66}^*} d\delta = 0$$

- Faktor utjecaja materijala na smicanje k^α definiran je s:

$$\int_t \frac{\bar{Q}_{11}^*}{\bar{Q}_{66}^*} d\delta = \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \frac{\bar{Q}_{11}^*}{\bar{Q}_{66}^*} d\delta = t \sum_{k=1}^N \frac{\bar{Q}_{11}^*}{\bar{Q}_{66}^*} \frac{t^k}{t} = k^\alpha t,$$

- Tangencijalno naprezanje u k -tom sloju

$$\tau_{x\xi}^k = -\frac{\bar{Q}_{11}^*}{t} \left(\frac{d^3 w}{dx^3} \frac{S_y^*}{t} - \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{A^*}{t} \right) + \bar{Q}_{16}^* k^\alpha \left(-\frac{d^4 w}{dx^4} \int_0^s \frac{S_y^*}{t} ds^* + \frac{d^3 u}{dx^3} \int_0^s \frac{A^*}{t} ds^* \right) + \frac{f^k}{t^k}.$$

- Srednje tangencijalno naprezanje

$$\tau_{x\xi,m} = \frac{1}{t} \int_t \tau_{x\xi}^k d\delta = -k^\beta \left(\frac{d^3 w}{dx^3} \frac{S_y^*}{t} - \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{A^*}{t} \right)$$

Savijanje tankostjenih kompozitnih štapova otvorenog poprečnog presjeka (STKŠ)

- Krutost laminata k^β je definirana s:

$$\int_t \bar{Q}_{11}^* d\delta = \sum_{k=1}^N \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \bar{Q}_{11}^* d\delta = t \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^* \frac{t^k}{t} = k^\beta t.$$

- Normalno naprezanje u k -tom sloju:

$$\sigma_x^k = \bar{Q}_{11}^* \left(-\frac{d^2 w}{dx^2} z + \frac{du}{dx} \right) + \bar{Q}_{11}^* k^\alpha \left(-\frac{d^4 w}{dx^4} \int_0^s \frac{S_y^*}{t} ds + \frac{d^3 u}{dx^3} \int_0^s \frac{A^*}{t} ds \right) + \bar{Q}_{16}^* k^\alpha \left(-\frac{d^3 w}{dx^3} \frac{S_y^*}{t} + \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{A^*}{t} \right).$$

- Srednje normalno naprezanje:

$$\sigma_{x,m} = \frac{1}{t} \int_t \sigma_x^k d\delta = k^\beta \left(-\frac{d^2 w}{dx^2} z + \frac{du}{dx} \right) + k^\beta k^\alpha \left(-\frac{d^4 w}{dx^4} \int_0^s \frac{S_y^*}{t} ds + \frac{d^3 u}{dx^3} \int_0^s \frac{A^*}{t} ds \right).$$

Savijanje tankostjenih kompozitnih štapova otvorenog poprečnog presjeka (STKŠ)

Diferencijalne jednačbe ravnoteže

$$q_z = \int_L p_z ds,$$

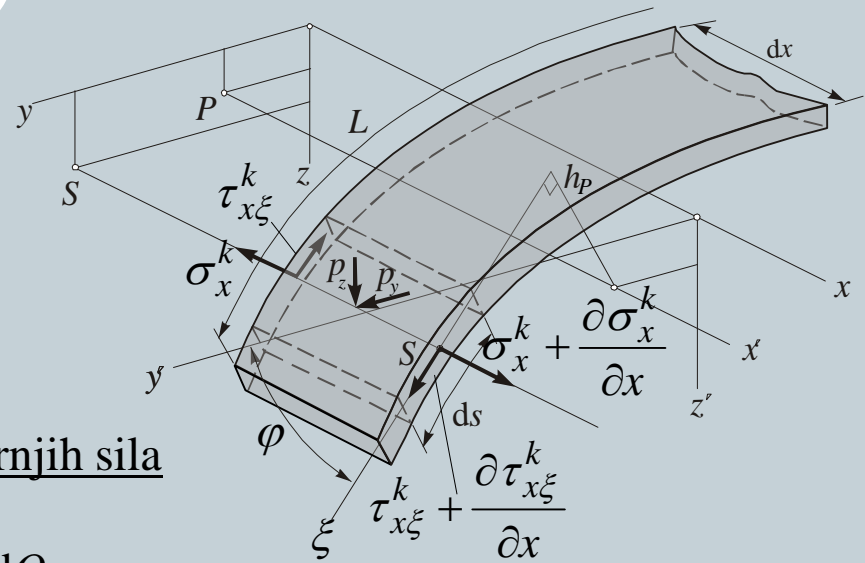
$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad k^\beta I_y \frac{d^4 w}{dx^4} = q_z, \quad I_y = \int_A z^2 dA$$

Tangencijalno naprezanje prikazano preko unutarnjih sila

$$\int_{L t} \tau_{x\xi}^k \sin \varphi d\delta ds = Q_z, \quad Q_z = -k^\beta I_y \frac{d^3 w}{dx^3}, \quad \frac{dQ_z}{dx} = -q_z.$$

- Tangencijalno naprezanje:

$$\tau_{x\xi}^k = Q_z \frac{\bar{Q}_{11}^* S_y^*}{k^\beta t I_y} - q_z \frac{\bar{Q}_{16}^* k^\alpha}{k^\beta I_y} \int_0^{s^*} \frac{S_y^*}{t} ds^* + q_z \frac{\bar{Q}_{16}^* k^\alpha}{k^\beta I_y} \int_0^{s^*} \frac{S_y^*}{t} ds^* \Big|_{s^*=0}, \quad \tau_{x\xi, m} = \frac{Q_z S_y^*}{I_y t}.$$



Savijanje tankostjenih kompozitnih štapova otvorenog poprečnog presjeka (STKŠ)



Normalno naprezanje izraženo preko unutarnjih sila

$$\int_{L} \int_{t} \sigma_x^k d\delta ds = 0, \quad M_y = \int_{L} \int_{t} \sigma_x^k z d\delta ds, \quad M_y = -k^\beta I_y \frac{d^2 w}{dx^2} - M_y^z, \quad k^\beta A \frac{du}{dx} - N^z = 0.$$

Sekundarne komponente unutarnjih sila : $M_y^z = q_z \frac{k^\alpha \kappa_{zz} I_y}{A}, \quad N^z = q_z k^\alpha \kappa_{xz} L_S,$

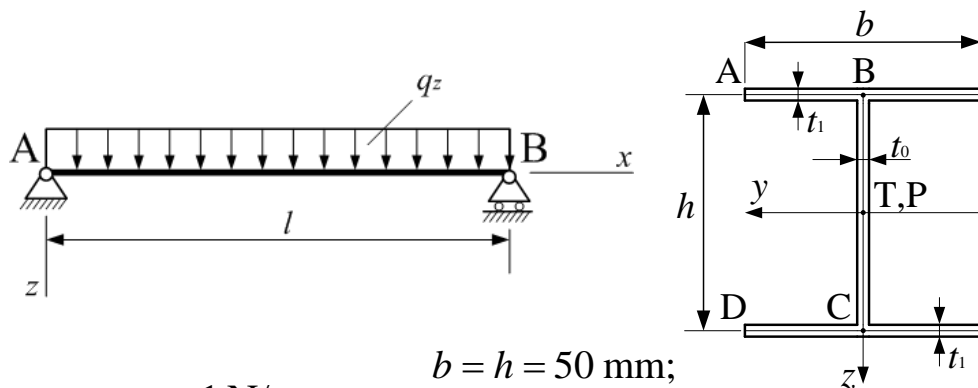
Faktori smicanja : $\kappa_{zz} = \frac{A}{I_y^2} \int_A \left(\frac{S_y^*}{t} \right)^2 dA, \quad \kappa_{xz} = \frac{1}{I_y L_S} \int_A \frac{A^* S_y^*}{t^2} dA,$

Normalno naprezanje:

$$\sigma_x^k = M_y \frac{\bar{Q}_{11}^*}{k^\beta I_y} z + q_z \frac{\bar{Q}_{11}^* k^\alpha \kappa_{zz}}{k^\beta A} z + q_z \frac{\bar{Q}_{11}^* k^\alpha \kappa_{xz} L_S}{k^\beta A} + Q_z \frac{\bar{Q}_{16}^* k^\alpha}{k^\beta t I_y} S_y^* - q_z \frac{\bar{Q}_{11}^* k^\alpha}{k^\beta I_y} \int_0^s \frac{S_y^*}{t} ds,$$

$$\sigma_{x,m} = \frac{M_y}{I_y} z + q_z \frac{k^\alpha \kappa_{zz}}{A} z + q_z \frac{k^\alpha \kappa_{xz} L_S}{A} - q_z \frac{k^\alpha}{I_y} \int_0^s \frac{S_y^*}{t} ds.$$

Analiza vertikalnih pomaka i srednjeg normalnog naprezanja pri savijanju tankostjenih kompozitnih štapova otvorenog poprečnog presjeka



$$q_z = 1 \text{ N/mm} \quad b = h = 50 \text{ mm};$$

$$t_0 = t_1 = 2,08 \text{ mm}.$$

Materijal (staklo/epoksi):

$$E_1 = 53.78 \text{ GPa}; \quad E_2 = E_3 = 17.93 \text{ GPa};$$

$$G_{23} = 3.45 \text{ GPa}; \quad G_{12} = G_{13} = 8.96 \text{ GPa};$$

$$\nu_{23} = 0.34; \quad \nu_{12} = \nu_{13} = 0.25.$$

Vertikalni pomak poprečnog presjeka na sredini raspona:

$$w = \eta \cdot w_b$$

Srednje normalno naprezanje u točki spoja struka i pojasa:

$$\sigma_{x,m} = \pm \lambda \cdot \frac{M_y}{I_y} \cdot \frac{h}{2}$$

Faktori utjecaja smicanja:

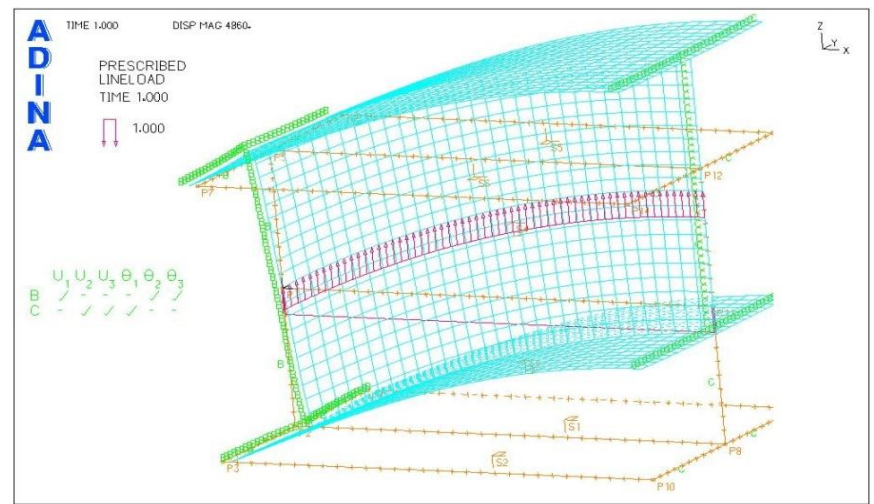
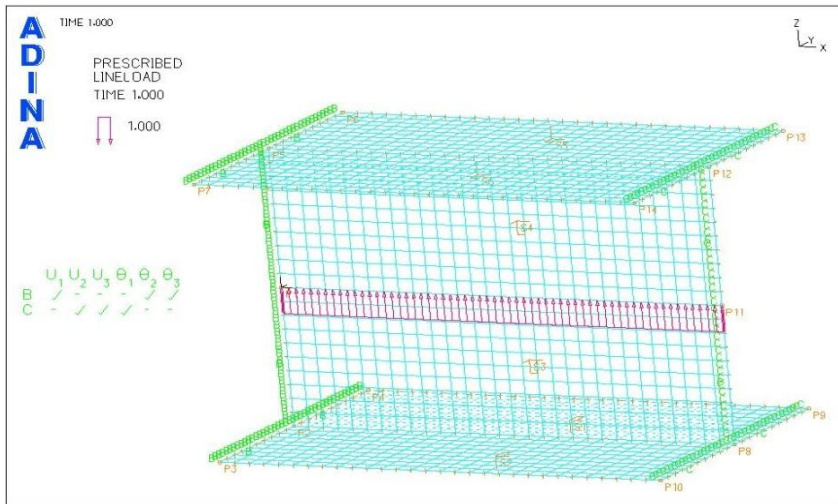
$$\eta = 1 + \frac{48}{5} \frac{k^\alpha I_y}{A_s l^2}, \quad \lambda = 1 + 8 \frac{k^\alpha I_y}{A_s l^2} \cdot \left(1 - \frac{A_s h (6A_1 + A_0)}{12t_0 I_y} \right),$$

$$A_s = A / \kappa_{zz}, \quad \kappa_{zz} = \frac{6(2 + \psi)^3 (30 + 10\psi + \psi^2 + 5\psi\rho^2)}{5\psi [12 + \psi(8 + \psi)]^2}, \quad \kappa_{xz} = 0,$$

$$\psi = A_0 / A_1, \quad \rho = b / h, \quad A_1 = bt_1, \quad A_0 = ht_0.$$

Metoda konačnih elemenata (MKE): ADINA software; 9-čvorni ljuskasti konačni element.

Zglobno-oslonjeni I-profil omjera $l/h=3$:

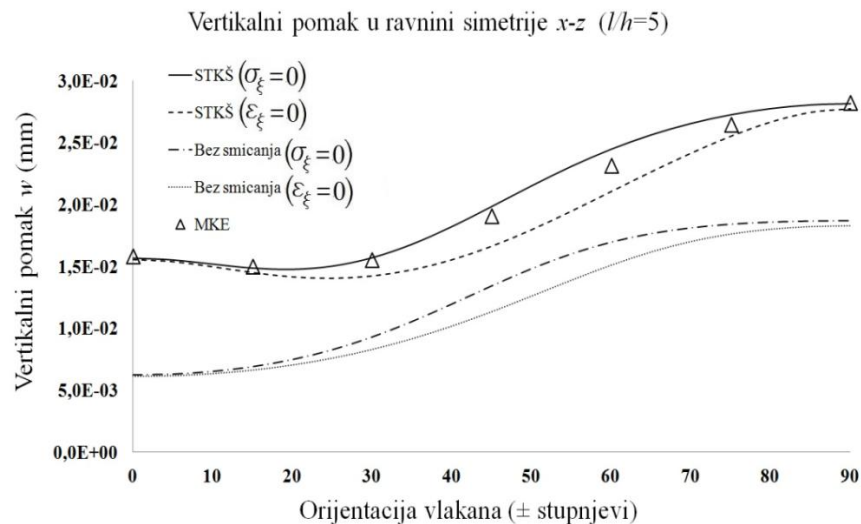
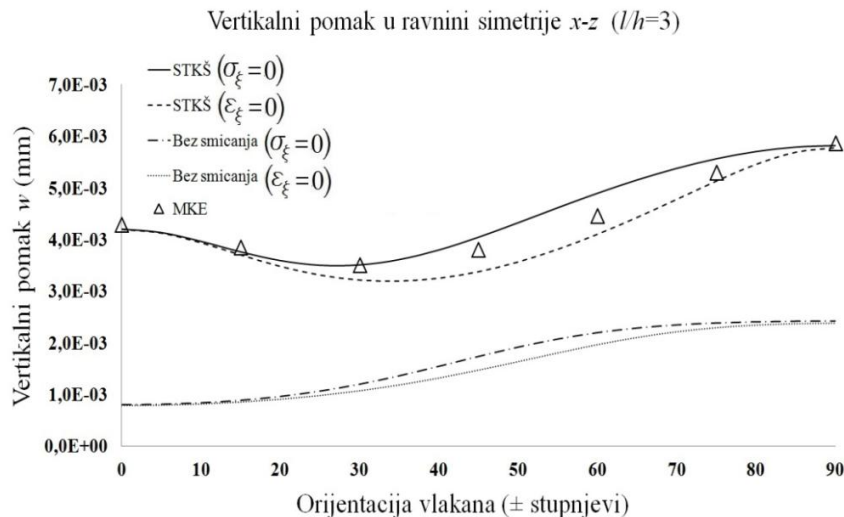


Faktori utjecaja smicanja na vertikalne pomake za I-profil omjera $l/h=3$ i $l/h=5$:

Konfiguracija slaganja	Faktori utjecaja smicanja na pomake			
	STKŠ		MKE	
	$\varepsilon_{\xi} = 0$	$\sigma_{\xi} = 0$	$\varepsilon_{\xi} = 0$	$\sigma_{\xi} = 0$
[0] ₁₆	5,296	5,207	5,434	5,321
[15/-15] _{4s}	4,314	4,212	4,498	4,310
[30/-30] _{4s}	2,990	2,918	3,265	2,911
[45/-45] _{4s}	2,293	2,327	2,594	2,192
[60/-60] _{4s}	2,090	2,228	2,227	2,030
[75/-75] _{4s}	2,241	2,332	2,317	2,220
[±90] _{4s}	2,432	2,402	2,474	2,422
[0/90] _{4s}	3,864	3,804	3,914	3,833

Konfiguracija slaganja	Faktori utjecaja smicanja na pomake			
	STKŠ		MKE	
	$\varepsilon_{\xi} = 0$	$\sigma_{\xi} = 0$	$\varepsilon_{\xi} = 0$	$\sigma_{\xi} = 0$
[0] ₁₆	2,546	2,514	2,590	2,536
[15/-15] _{4s}	2,193	2,156	2,266	2,172
[30/-30] _{4s}	1,716	1,690	1,876	1,672
[45/-45] _{4s}	1,465	1,477	1,681	1,420
[60/-60] _{4s}	1,392	1,442	1,532	1,366
[75/-75] _{4s}	1,447	1,479	1,499	1,436
[±90] _{4s}	1,515	1,504	1,542	1,510
[0/90] _{4s}	2,031	2,010	2,055	2,012

Promjena vertikalnih pomaka w s orijentacijom materijalnih osi vlakana:

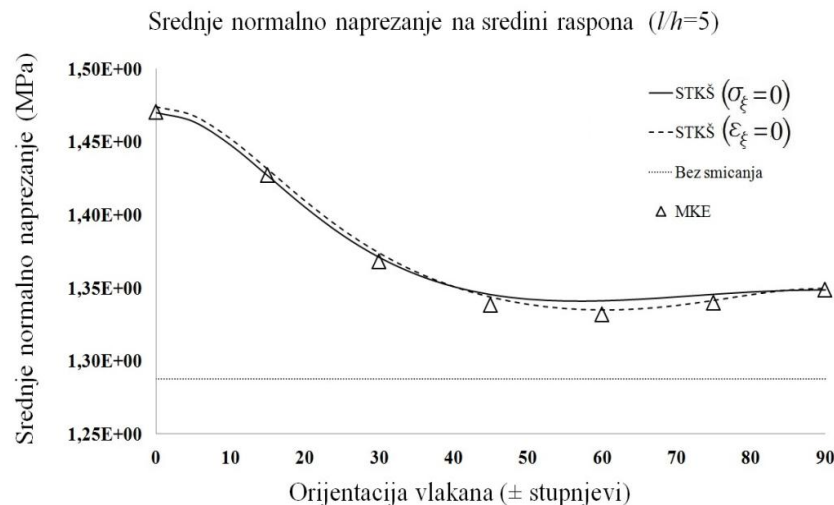
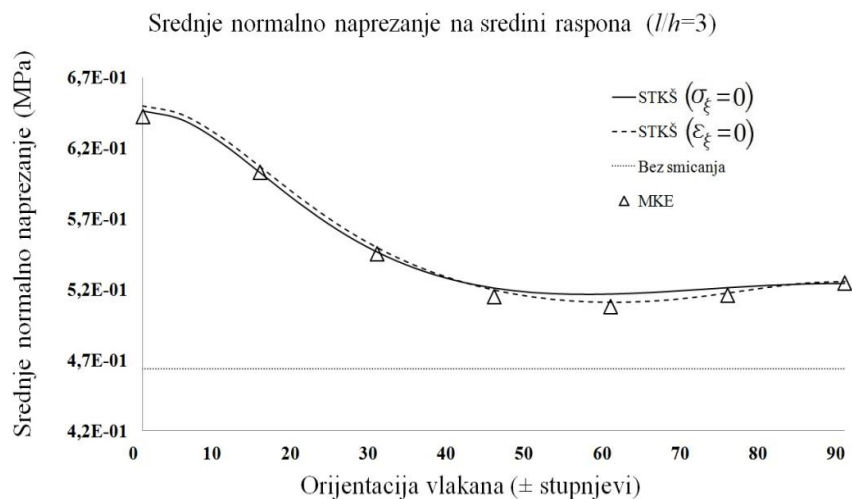


Faktori utjecaja smicanja na srednje normalno naprezanje za I-profil omjera $l/h=3$ i $l/h=5$:

Konfiguracija slaganja	Faktori utjecaja smicanja na naprezanja		
	STKŠ		MKE
	$\varepsilon_{\xi} = 0$	$\sigma_{\xi} = 0$	
$[0]_{16}$	1,402	1,393	1,385
$[15/-15]_{4s}$	1,310	1,300	1,301
$[30/-30]_{4s}$	1,186	1,179	1,176
$[45/-45]_{4s}$	1,121	1,124	1,110
$[60/-60]_{4s}$	1,102	1,114	1,096
$[75/-75]_{4s}$	1,116	1,124	1,113
$[\pm 90]_{4s}$	1,134	1,131	1,132
$[0/90]_{4s}$	1,268	1,265	1,260

Konfiguracija slaganja	Faktori utjecaja smicanja na naprezanja		
	STKŠ		MKE
	$\varepsilon_{\xi} = 0$	$\sigma_{\xi} = 0$	
$[0]_{16}$	1,144	1,141	1,142
$[15/-15]_{4s}$	1,111	1,108	1,109
$[30/-30]_{4s}$	1,067	1,064	1,063
$[45/-45]_{4s}$	1,043	1,044	1,039
$[60/-60]_{4s}$	1,036	1,041	1,034
$[75/-75]_{4s}$	1,041	1,044	1,041
$[\pm 90]_{4s}$	1,048	1,047	1,047
$[0/90]_{4s}$	1,096	1,094	1,094

Promjena srednjeg normalnog napreznja $\sigma_{x,m}$ s orijentacijom materijalnih osi vlakana:



Usporedba faktora utjecaja smicanja na srednje normalno napreznje za omjere $l/h=3$ i $l/h=5$:

Konfiguracija slaganja	$\frac{\text{STKŠ-MKE}}{\text{MKE}} \cdot 100(\%)$	
	$\varepsilon_{\xi} = 0$	$\sigma_{\xi} = 0$
$[0]_{16}$	1,206	0,600
$[15/-15]_{4s}$	0,711	-0,022
$[30/-30]_{4s}$	0,836	0,261
$[45/-45]_{4s}$	0,967	1,257
$[60/-60]_{4s}$	0,585	1,768
$[75/-75]_{4s}$	0,272	1,037
$[\pm 90]_{4s}$	0,200	-0,046
$[0/90]_{4s}$	0,634	0,190

Konfiguracija slaganja	$\frac{\text{STKŠ-MKE}}{\text{MKE}} \cdot 100(\%)$	
	$\varepsilon_{\xi} = 0$	$\sigma_{\xi} = 0$
$[0]_{16}$	0,238	-0,025
$[15/-15]_{4s}$	0,274	-0,035
$[30/-30]_{4s}$	0,423	0,193
$[45/-45]_{4s}$	0,407	0,519
$[60/-60]_{4s}$	0,236	0,687
$[75/-75]_{4s}$	0,122	0,416
$[\pm 90]_{4s}$	0,089	-0,006
$[0/90]_{4s}$	0,218	0,034

• Zaključak

- Postavljeno je analitičko rješenje za slučaj savijanja tankostjenih kompozitnih štapova otvorenog poprečnog presjeka s dvije osi simetrije,
- Faktori utjecaja smicanja dani su u parametarskom obliku kako bi se usporedio utjecaj smicanja na savijanje,
- Smicanje značajno utječe na strukturno ponašanje tankostjenih kompozitnih štapova opterećenih na svijanje,
- Utjecaj smicanja ne može se zanemariti niti za relativno duge štapove,
- Usporedbom vrijednosti vertikalnih pomaka koje daju razvijeni analitički model te MKE dobivena su određena odstupanja (za *angle-ply* laminate) kao posljedica svođenja ravninskog stanja naprezanja na jednodimenzionalno stanje,
- Usporedbom vrijednosti srednjeg normalnog naprezanja koje daju razvijeni analitički model te MKE dobiveno je izvrsno slaganje rezultata za sve konfiguracije slaganja laminata.

Hvala na pažnji!