



CROATIAN  
RESEARCH  
UNIT

# *Pregled analitičkih rješenja Grad- Shafranove jednadžbe*

Silvestar Šesnić

Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje

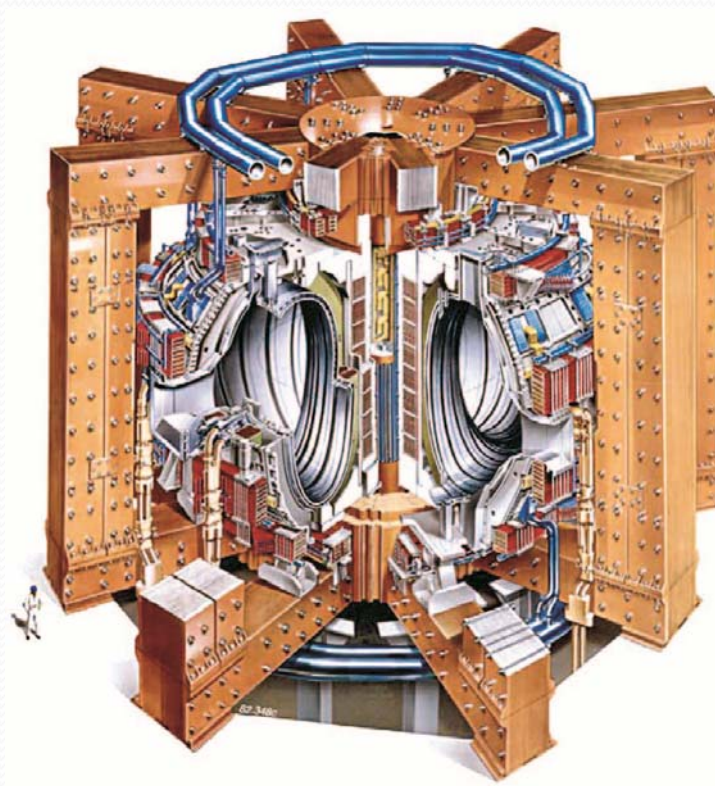
Sveučilište u Splitu

# Sadržaj

- Uvod
- Izvod Grad-Shafranove jednačbe
- Analitička rješenja
  - Rješenje homogene jednačbe
  - Solov'ev-a ravnoteža
  - Herrnegger–Maschke-ova rješenja
  - Mc Charty-evo rješenje
- Numerički rezultati
- Zaključna razmatranja

# Uvod

# Joint European Torus (JET) tokamak



# Uvod

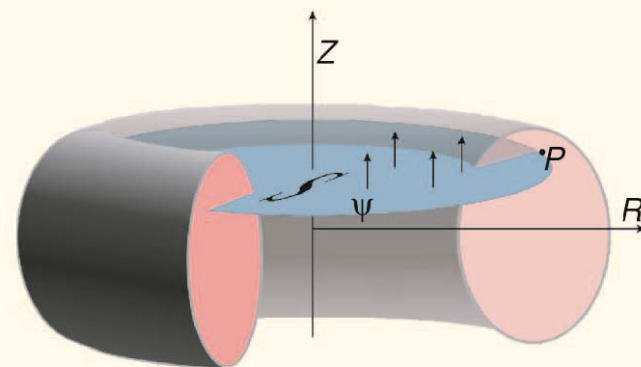
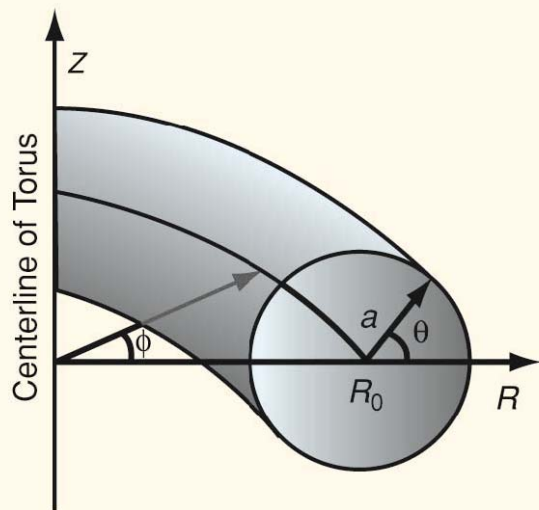
- Tokamak – uređaj za ograničavanje plazme pomoću magnetskog polja
- Najizgledniji od nekoliko predloženih uređaja za magnetsko ograničavanje
- Temeljna zadaća eksperimentalnih tokamaka – otkriti metode za ograničavanje i zagrijavanje plazme s ciljem dobivanja održive fuzijske reakcije
- Izniman znanstveni i tehnološki izazov

# Uvod

- Matematički modeli
  - Dinamika fluida
  - Elektromagnetska teorija
- Jednadžbe magnetohidrodinamike (MHD)
  - Stacionarna plazma
  - Savršeno vodljiva plazma
- Grad-Shafranova jednadžba
  - Ravnoteža plazme
  - Transport
  - MHD stabilnost

# Izvod Grad-Shafranove jednadžbe

# Toroidalna konfiguracija za izvod GSE



$$\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$$

Aksijalna simetrija



# Temeljne jednađbe

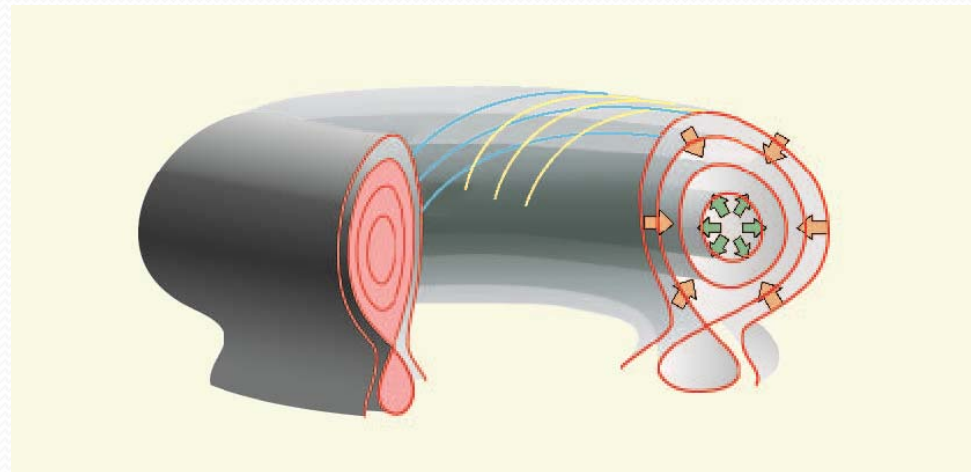
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\nabla \vec{B} = 0$$

Maxwellove jednađbe

$$\vec{J} \times \vec{B} = \nabla P$$

Uvjet ravnoteže



# Izvod za magnetsku indukciju

$$d\psi = \vec{B}d\vec{S}$$

Poloidalni magnetski tok

$$B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad B_\phi = \frac{\mu_0 I_{pol}}{2\pi r} = \frac{f}{r} \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{r} \nabla \psi \times \vec{e}_\phi + \frac{f}{r} \vec{e}_\phi$$

Magnetska indukcija

# Izvod za gustoću struje

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0 r} (\nabla f \times \vec{e}_\phi - \Delta^* \psi \vec{e}_\phi)$$

Gustoća struje

$$\Delta^* \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Modificirani Laplace operator

# Izvod konačne jednačbe

$$\vec{J} \times \vec{B} = \nabla P \Rightarrow \vec{J} \nabla P = 0$$

$$\vec{B} \nabla P = 0$$

$$\Delta^* \psi = -f \frac{df}{d\psi} - \mu_0 r^2 \frac{dP}{d\psi}$$

Grad-Shafranova jednačba

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\mu_0 r j_\phi$$

# Analitička rješenja

# Homogena rješenja

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

Homogena jednačba

$$\psi_0(r, z) = (c_1 r J_1(kr) + c_2 r Y_1(kr)) (c_3 e^{kz} + c_4 e^{-kz})$$

$$\psi_0(r, z) = c_1 + c_2 r^2 + c_3 (r^4 - 4r^2 z^2) + c_4 (r^2 \ln r - z^2)$$

# Solov'ev-a ravnoteža

$$P(\psi) = \frac{A}{\mu_0} \psi, f^2(\psi) = 2B\psi + F_0^2$$

Linearne funkcije izvora

$$\psi(r, z) = \psi_0(r, z) - \frac{A}{8} r^4 - \frac{B}{2} z^2$$

$\psi_0$  - rješenje homogene GSE

Solov'ev-a ravnoteža se koristi za proučavanje ravnoteže plazme, transporta te analize MHD stabilnosti.

# Herrnegger–Maschke-ova rješenja

$$P(\psi) = \frac{C}{2\mu_0} \psi^2, f^2(\psi) = D\psi^2 + F_0^2$$

Kvadratne funkcije izvora

$$\psi = \alpha \left( F_0(\eta, x) + \gamma G_0(\eta, x) \right) \cos(kz)$$

$F_0, G_0$  – Coulomb-ove valne funkcije

Slično Solov'ev-ovoj ravnoteži, ali s paraboličnom prostornom ovisnosti funkcija izvora.



# Mc Carthy-evo rješenje

$$P(\psi) = \frac{S}{\mu_0} \psi, f^2(\psi) = T\psi^2 + 2U\psi + F_0^2$$

Različite funkcije izvora

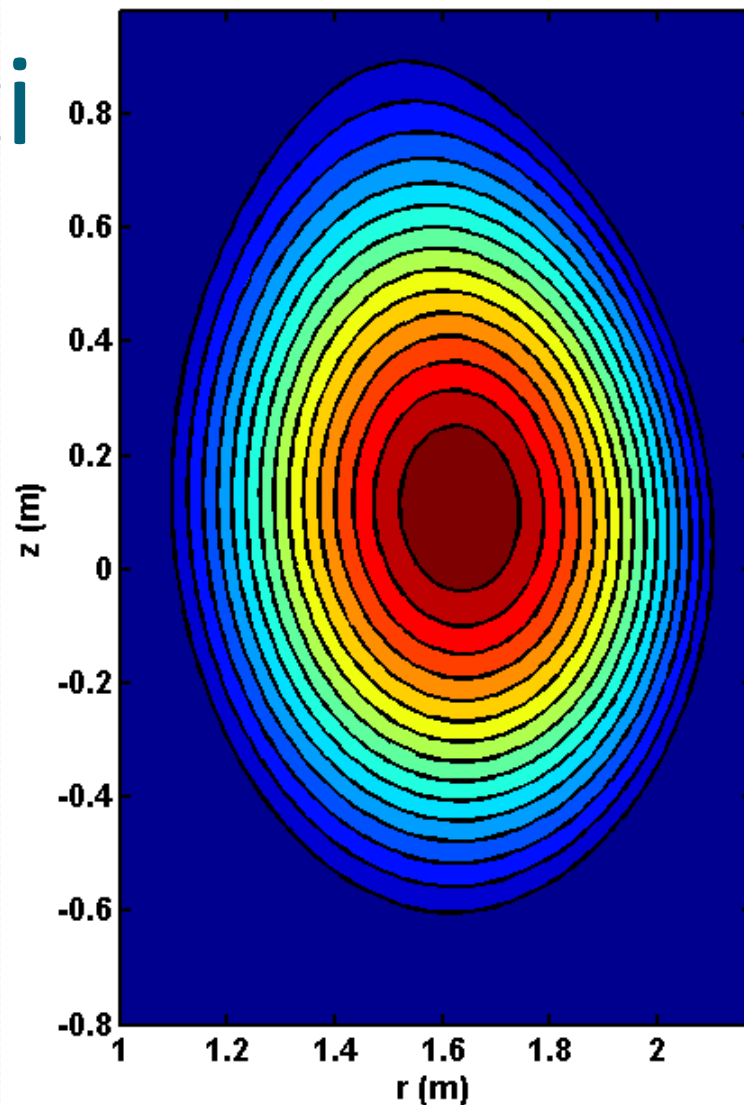
$$\begin{aligned} \psi = & c_1 + c_2 r^2 + rJ_1(pr)(c_3 + c_4 z) + c_5 \cos pz + c_6 \sin pz \\ & + r^2(c_7 \cos pz + c_8 \sin pz) + c_9 \cos p\sqrt{r^2 + z^2} + c_{10} \sin p\sqrt{r^2 + z^2} \\ & + rJ_1(vr)(c_{11} \cos qz + c_{12} \sin qz) + rJ_1(qr)(c_{13} \cos vz + c_{14} \sin vz) \\ & + rY_1(vr)(c_{15} \cos qz + c_{16} \sin qz) + rY_1(qr)(c_{17} \cos vz + c_{18} \sin vz) \end{aligned}$$

Dovoljno fleksibilna za opis ravnoteže konzistentan s magnetskim mjerenjima.

# Numerički rezultati

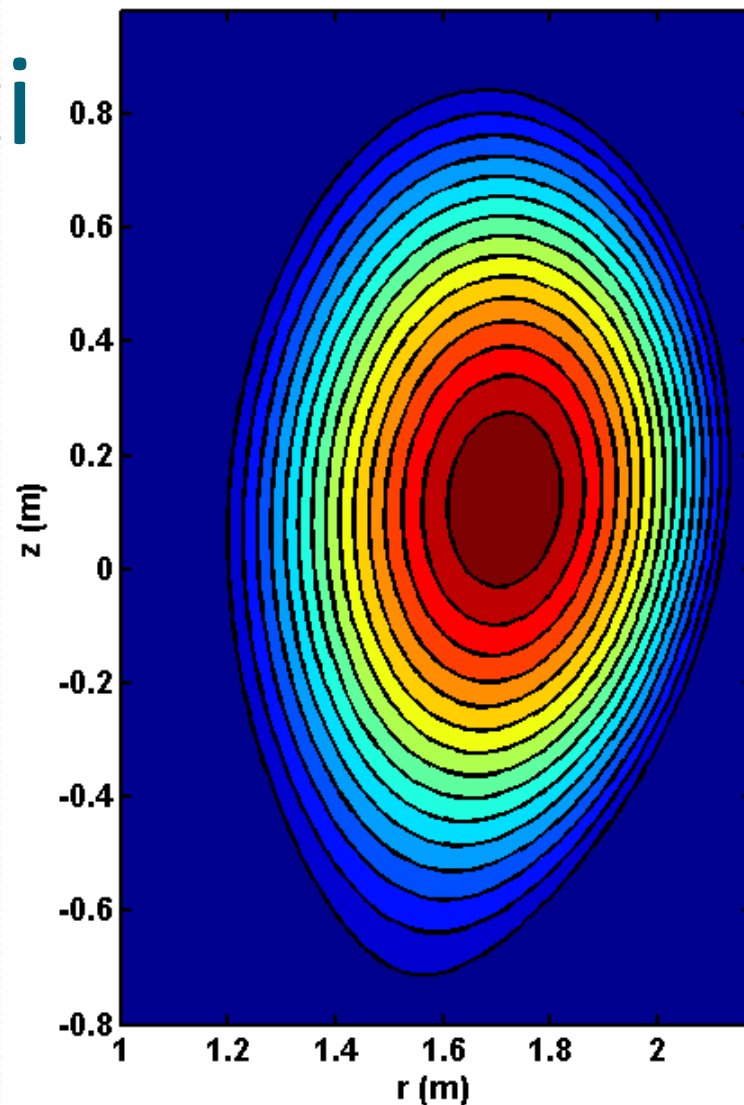
# Numerički rezultati

Egzaktno rješenje GSE za ASDEX Upgrade izboj # 10 966,  $t=1.242$  s



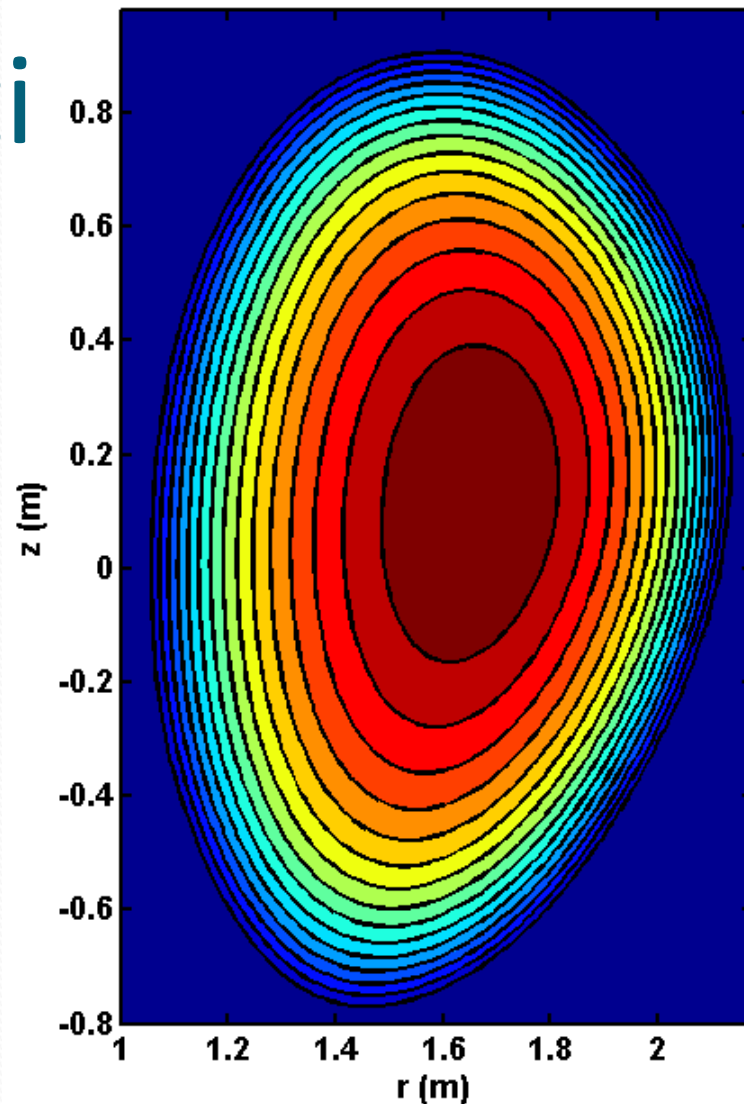
# Numerički rezultati

Egzaktno rješenje GSE za ASDEX  
Upgrade izboj # 10 958,  $t=5.200$  s



# Numerički rezultati

Egzaktno rješenje GSE za prediktivnu ravnotežu kod ASDEX Upgrade



# Zaključna razmatranja

# Budući rad

- Analiza različitih rješenja homogene GSE
- Razvoj novih analitičkih rješenja za različite funkcije izvora
- Daljnji razvoj analitičkih rješenja koja će se koristiti u okviru WP-CD-a

# Zaključak

- Analitička rješenja Grad-Shafranove jednadžbe su vrlo korisna za teoretsko razmatranje ravnoteže u plazmi, transporta i magnetohidrodinamičke stabilnosti
- Služe za 'benchmarking' numeričkih kodova
- Osnovne prednosti analitičkog rješenja
  - Jednostavnost
  - Kratko vrijeme proračuna



**Hvala na pozornosti!**