

**SVEUČILIŠTE U SPLITU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I
BRODOGRADNJE**

ZAVRŠNI RAD

**PRIMJENA METODE SILA NA RAVNINSKI
OKVIR UZ UKLJUČEN UTJECAJ
SMICANJA**

Franko Žaknić

Split, rujan 2019.



SVEUČILIŠTE U SPLITU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I
BRODOGRADNJE



Preddiplomski sveučilišni studij: **Strojarstvo**

Smjer/Usmjerenje:

Oznaka programa: 130

Akadska godina: 2018./2019.

Ime i prezime: **FRANKO ŽAKNIĆ**

Broj indeksa: 364-2016

ZADATAK ZAVRŠNOG RADA

Naslov: **PRIMJENA METODE SILA NA RAVNINSKI OKVIR UZ UKLJUČEN
UTJECAJ SMICANJA**

Zadatak: U teorijskom dijelu rada, proučiti ravninske sustave štapova te dati kratki opis metode sila. Numerički primjer ravninskog sustava štapova - brodskog okvira riješiti metodom sila s utjecajem i bez utjecaja smicanja koristeći se principom superpozicije.

Datum obrane: 18.09.2019.

Mentor:

prof. dr. sc. Frane Vlák

IZJAVA

Ovom izjavom potvrđujem da sam završni rad s naslovom PRIMJENA METODE SILA NA RAVNINSKI OKVIR UZ UKLJUČEN UTJECAJ SMICANJA pod mentorstvom prof. dr. sc. Frane Vlaka pisao samostalno, primijenivši znanja i vještine stečene tijekom studiranja na Fakultetu elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, kao i metodologiju znanstveno-istraživačkog rada, te uz korištenje literature koja je navedena u radu. Spoznaje, stavove, zaključke, teorije i zakonitosti drugih autora koje sam izravno ili parafrazirajući naveo u završnom radu citirao sam i povezao s korištenim bibliografskim jedinicama.

Student

Franko Žaknić

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Žaknić', with a stylized flourish above the first letter.

Zahvala:

Zahvaljujem se dr. sc. Branki Bužančić Primorac na savjetima i konzultacijama prilikom izrade ovog završnog rada, a koje su se ticale teorijskog dijela rada kao i provjere svih rješenja.

SADRŽAJ

1. UVOD	1
2. RAVNINSKI SUSTAV ŠTAPOVA	2
2.1. Vrste ravninskih štapova	2
2.2. Veze između štapova	3
2.3. Stupanj slobode i statička neodređenost	4
2.4. Simetrija i antisimetrija	6
3. METODA SILA	7
4. PRIMJER	11
4.1. Rješenje	12
4.1.1. Osnovni sustav s cilindričnim zglobovima bez utjecaja smicanja	15
4.1.2. Osnovni sustav s uklonjenim osloncima u točki D bez utjecaja smicanja	24
4.1.3. Osnovni sustav s cilindričnim zglobovima sa uključenim utjecajem smicanja	33
4.1.4. Osnovni sustav s uklonjenim osloncima u točki D uz uključen utjecaj smicanja	39
4.2. Raspodjela momenata savijanja sa podacima za brodsko rebro	45
5. ZAKLJUČAK	48
6. LITERATURA	49
7. POPIS OZNAKA I KRATICA	50
8. SAŽETAK	51

1. UVOD

U svijetu postoji velik broj konstrukcija koje treba proračunavati. Tako ima i onih koje nisu tako jednostavne, pa se često rješavaju da se preoblikuju u sustave štapova (okvire ili rešetke). Prilikom rješavanja tih sustava dolazi do problema prekobrojnih veza. Zbog većeg broja nepoznanica u odnosu na broj jednažbi pristupa se rješavanju pomoću određenih metoda, a jedna od njih je i metoda sila.

Metoda sila je metoda proračuna statički neodređenih sustava u kojima su nepoznanice sile i momenti. Zadani statički sustav se zamjenjuje osnovnim koji se dobije tako da se na zadanom sustavu uklone prekobrojne veze. Te prekobrojne veze zamjenjuju se sa silama ili momentima da se ne poremeti zadani sustav i kako bi ostao statički određen[2].

Tema ovog završnog rada je rješavanje ravninskog okvira. Prvi dio prikazuje rezultate rješavanja za opći slučaj opterećenja ravninskog okvira, a drugi dio prikazuje rezultate za konkretan primjer s podacima broskog rebra. Ravninski okvir je dva puta statički neodređen pa se koristi metoda sila. Zbog simetričnosti ravninskog okvira, opterećenje će se rastaviti kao simetrično i antisimetrično te će se ukupna raspodjela momenata dobiti superpozicijom rezultata.

S obzirom da se, prilikom određivanja raspodjela unutarnjih sila, osim momenata savijanja, uzimaju u obzir i poprečne sile, u ovom primjeru će se prikazati rješenja sa i bez utjecaja smicanja.

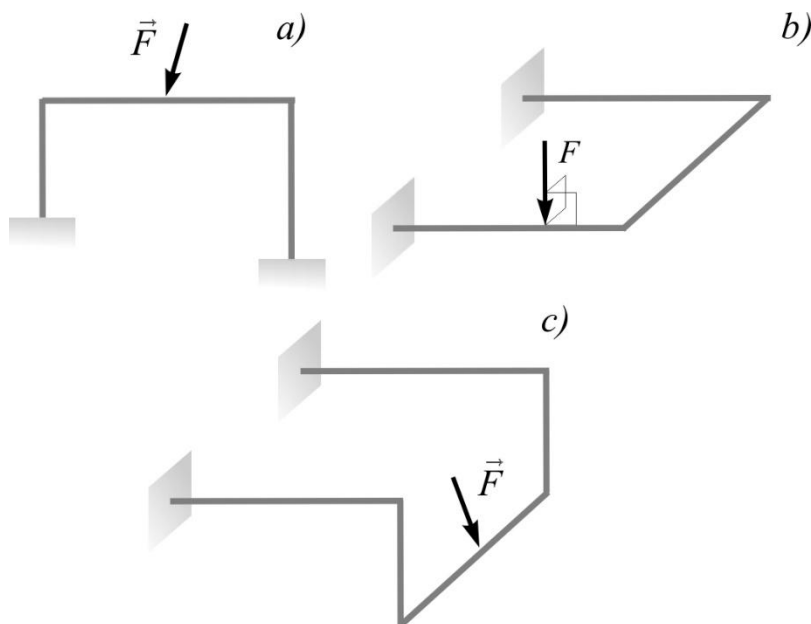
2. RAVNINSKI SUSTAV ŠTAPOVA

2.1. Vrste ravninskih štapova

Ravninskim sustavom štapova se smatra skup od više štapova, koji međusobno i za podlogu mogu biti na različit način vezani. Svaki sustav ima uzdužnu os koja leži u jednoj ravnini, koja je glavna ravnina poprečnih presjeka svih štapova, u kojoj leže sve vanjske sile, kao i reakcije podloge, koja se naziva ravninom sustava. (slika 2.1. a)) [1].

Prostorno-ravninski sustav štapova je sustav štapova koji mogu biti vezani na različite načine, a uzdužne osi leže u jednoj ravnini (kao kod ravninskog sustava), a vanjske sile djeluju okomito na ravninu sustava. (slika 2.1. b)).

Prostorni sustav štapova je sustav koji nema uzdužnu os koja leži u jednoj ravnini, a štapovi mogu biti povezani krutim čvorom kao i sa sfernim zglobovima koji dozvoljavaju promjenu kuta uzdužnih osi. Također mogu biti vezani sa poprečnim translacijskim zglobovima koji omogućuju translaciju poprečnih presjeka, te sa uzdužnim translacijskim zglobovima. (slika 2.1.c)).

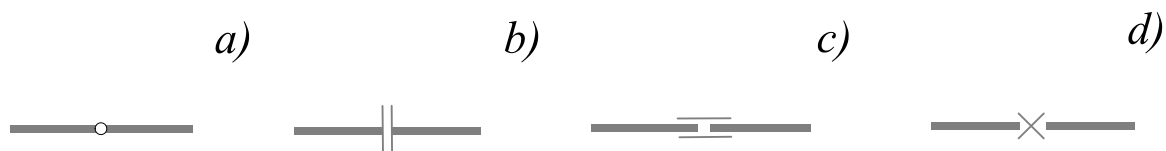


Slika 2.1. Sustavi štapova [1]

2.2. Veze među ravninskim sustavom štapovima

Štapovi mogu biti vezani[1]:

- Krutim čvorom – onemogućuje promjenu kuta između uzdužnih osi štapova u ravni sustava
- Cilindričnim zglobovom – omogućuju slobodnu promjenu kuta između uzdužnih osi štapova, ali ne prenose moment savijanja, slika 2.2.a
- Poprečni translacijski zglob – omogućuju translaciju poprečnih presjeka u zglobovima okomito na ravninu sustava, ali ne prenose poprečnu silu, slika 2.2.b
- Uzdužni translacijski zglobovi – omogućuju translaciju poprečnih presjeka u zglobovima u smjeru uzdužnih osi štapova, ali ne prenose uzdužnu silu, slika 2.2.c
- Torzijski zglobovi – omogućuju rotaciju poprečnih presjeka u zglobovima oko uzdužnih osi štapova, ali ne prenose moment uvijanja, slika 2.2.d



Slika 2.2. Veze među štapovima [1]

2.3. Stupanj slobode i statička neodređenost

Stupanj slobode je kinematička karakteristika koja predstavlja najmanji broj nezavisnih parametara s pomoću kojih je moguće odrediti položaj svih točaka sustava, kao krutog tijela [1].

Izraz za određivanje stupnja slobode sustava štapova za ravninski sustav [1] glasi:

$$S = R - 3K \quad (2.1.)$$

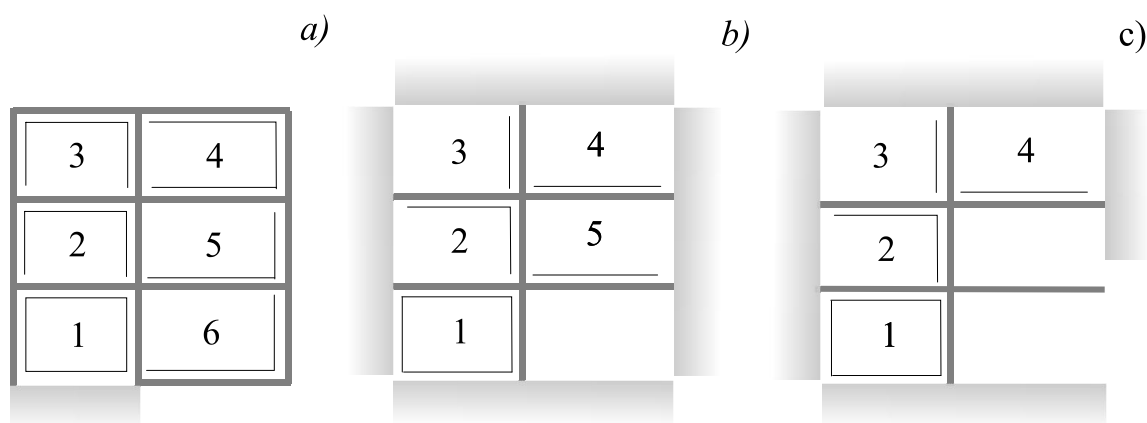
gdje je:

S - stupanj slobode

R - prividan broj jednostavnih cilindričnih zglobova (pod prividnim brojem jednostavnih zglobova razumijeva se broj koji odgovara $n - 1$ jednostavnom zglobu[1])

K - broj nezavisnih zatvorenih kontura (razumijeva se broj kontura koje se mogu opisati u sustavu, tako da u svakoj sljedećoj konturi bude bar jedna stranica koja nije prethodno opisana [1])

Na slici 2.3. prikazano je nekoliko primjera vezanih za određivanje broja nezavisnih zatvorenih kontura.



Slika 2.3. Određivanje kontura [1]

Statička neodređenost sustava štapova predstavlja sustav kod kojeg komponente unutarnjih sila ne mogu odrediti u svim štapovima s pomoću uvjeta statičke ravnoteže[1].

Stupanj statičke neodređenosti sustava štapova jednak je stupnju slobode sustava s negativnim predznakom.

$$D = -S \quad (2.2)$$

Za ravninski sustav [1]:

$$D = 3K - R \quad (2.3)$$

2.4. Simetrija i antisimetrija

Simetrija sustava razumijeva geometrijsku sličnost sustava[1]. Tako za ravninski sustav postoje jedna ili dvije osi simetrije oko kojih vrijedi simetričnost sustava.

Zbog principa superpozicije možemo rastaviti opterećenje u odnosu na os ili ravninu simetrije sustava na simetrično i antisimetrično opterećenje.

Kod ravninskog sustava moment savijanja i uzdužna sila su simetrične komponente, dok je poprečna sila antisimetrična komponenta. Proizlazi da u presjeku u ravnini simetrije sustava štapova antisimetrične komponente moraju biti jednake nuli pri simetričnom opterećenju, dok simetrične komponente moraju biti jednake nuli pri antisimetričnom opterećenju. [1].

Kada je zadovoljena simetričnost ravninskog sustava štapova, može se promatrati samo polovica sustava, ali treba dodati poprečne translacijske zglobove kod kojih su poprečne sile jednake nuli, dok pri antisimetričnom opterećenju sustava treba dodati uzdužne translacijske zglobove gdje su uzdužne sile jednake nuli. [1]

Izraz za određivanje stupnja slobode za polovicu simetričnog sustava postaje [1]:

$$S = R - 3K + R_Q \quad (2.4)$$

gdje R_Q predstavlja broj poprečnih translacijskih zglobova za ravninski sustav.

Statička neodređenost slijedi iz izraza [1]:

$$\begin{aligned} D &= -S, \text{ pa je} \\ D &= 3K - R - R_Q. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Razmatranjem polovice ili četvrtine zadanog problema može se ukupni broj nepoznanica značajno smanjiti te time učinkovitije i brže riješiti problem.

3. METODA SILA

Osnovni sustav metode sila

Metoda sila svodi se na oslobađanje zadanog statički neodređenog sustava prekobrojnih veza tako da se dobije sustav koji je kinematički nepromjenjiv i statički određen koji se naziva osnovnim sustavom. On će biti ekvivalentan ako se na mjestu uklonjenih prekobrojnih veza dodaju odgovarajuće poopćene sile (takozvane nepoznanice X) [1].

Određivanje osnovnog sustava nije jednoznačno.

Za ravninski sustav štapova kinematička nepromijenjenost osnovnog sustava provjerava se pomoću izraza:

$$S = R - 3K = 0.$$

Kanonske jednadžbe metode sila

Kanonske jednadžbe slijede temeljem teorema o minimumu potencijalne energije deformiranosti [1].

$$q_{i1} + q_{i2} + q_{i3} + \dots + q_{in} + q_{iF} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Sa dodanim nepoznanicama X poopćenim silama izraz postaje :

$$f_{11}X_1 + f_{12}X_2 + \dots + f_{1i}X_i + \dots + f_{1n}X_n + q_{1F} = 0$$

$$f_{21}X_1 + f_{22}X_2 + \dots + f_{2i}X_i + \dots + f_{2n}X_n + q_{2F} = 0$$

.

.

.

$$f_{i1}X_1 + f_{i2}X_2 + \dots + f_{ii}X_i + \dots + f_{in}X_n + q_{iF} = 0 \quad (2.6)$$

.

.

.

$$f_{n1}X_1 + f_{n2}X_2 + \dots + f_{ni}X_i + \dots + f_{nn}X_n + q_{nF} = 0. [1]$$

gdje je:

f_{ij} —koeficijenti podatnosti

q_{iF} —slobodni član

Koeficijenti podatnosti i poopćeni pomaci računaju se prema izrazima:

$$f_{ij} = \sum_1^m \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y_i} \tilde{M}_{y_j}}{EI} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z_i} \tilde{Q}_{z_j}}{GA} + \frac{\tilde{N}_i \tilde{N}_j}{EA} \right) dx \quad (2.7)$$

$$q_{iF} = \sum_1^m \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y_i} \tilde{M}_{y_F}}{EI} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z_i} \tilde{Q}_{z_F}}{GA} + \frac{\tilde{N}_i N_F}{EA} \right) dx \quad (2.8)$$

gdje je:

$\tilde{M}_{y_l}$ – raspodjela momenta savijanja uslijed jedinične poopćene sile na mjestu „i“

M_{y_F} – raspodjela momenta savijanja uslijed djelovanja zadanog opterećenja

$\tilde{Q}_{z_l}$ – raspodjela poprečne sile uslijed jedinične poopćene sile na mjestu „i“

Q_{z_F} – raspodjela poprečne sile uslijed djelovanja zadanog opterećenja

κ_z – faktor smicanja

$\tilde{N}_l$ – raspodjela uzdužne sile uslijed jedinične poopćene sile na mjestu „i“

N_F – raspodjela uzdužne sile uslijed djelovanja zadanog opterećenja

EI_y – savojna krutost nosača

EA – aksijalna krutost nosača

E – Youngov modul elastičnosti

G – modul smicanja

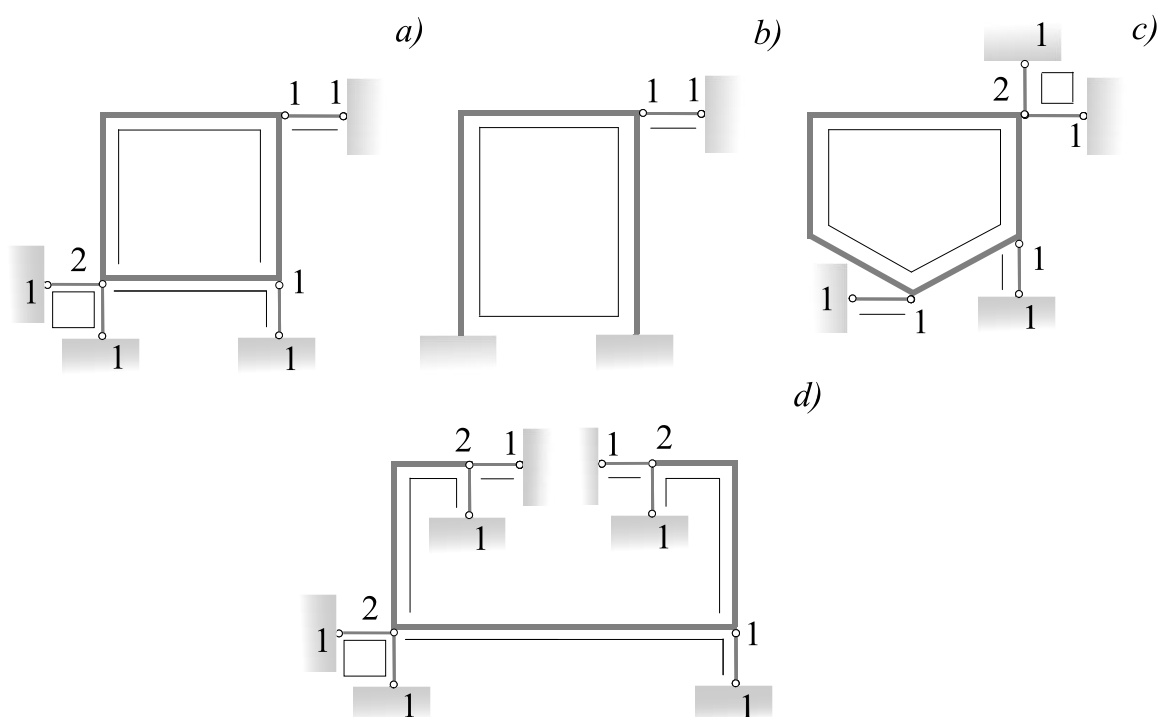
A – površina poprečnog presjeka

Ravninski osnovni sustavi metode sila

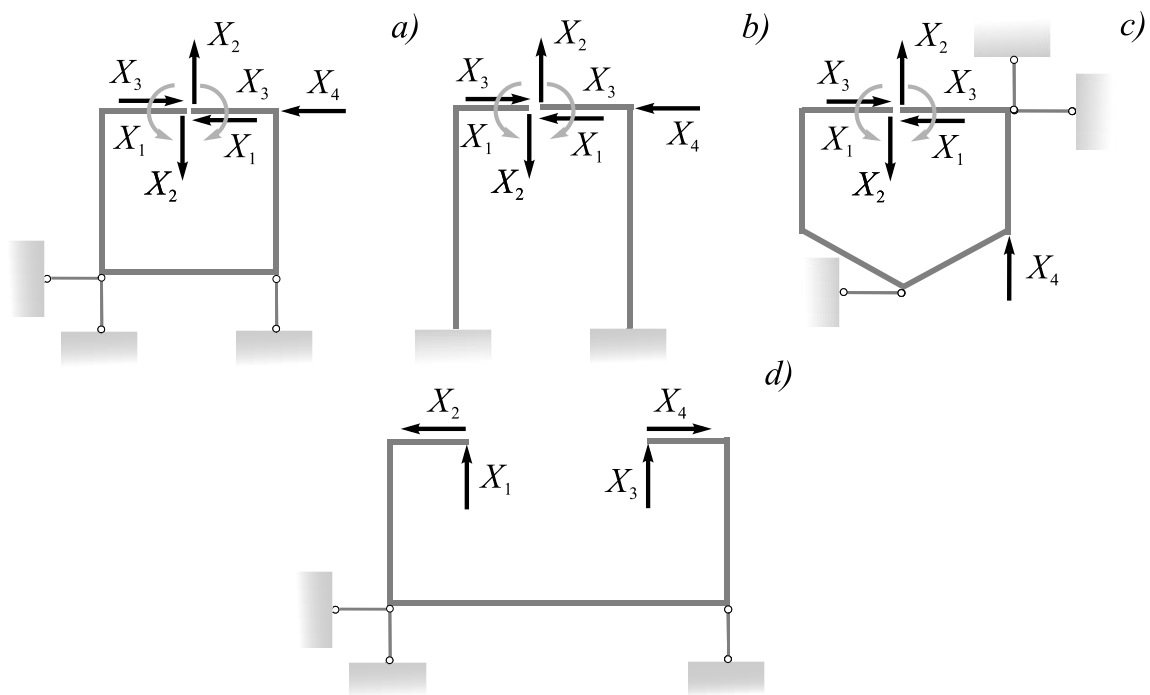
Slika 3.1. prikazuje statički neodređene sustave, koji su preoblikovani da postanu statički određeni. To se postiže tako da se prekobrojne veze uklone i umjesto njih se dodaju sile ili momenti kako se nebi narušio zadani sustav. Broj prekobrojnih veza određuje se pomoću izraza $D = 3K - R$ i uz njega se sustav prilagodi za primjenu metode sila. Na slici 3.2. su prikazani neki od odgovarajućih statički određenih sustava.

Na slici 3.1.b prikazan je statički neodređeni ravninski okvir, dok je odgovarajući osnovni sustav ako sustav dvaju konzolnih okvira prikazan na slici 3.2.b.

Za statički neodređene nosače na slici 3.1.a, c i d prikazani su na slici 3.2.a, c i d odgovarajući osnovni sustavi kao statički određeni nosači.



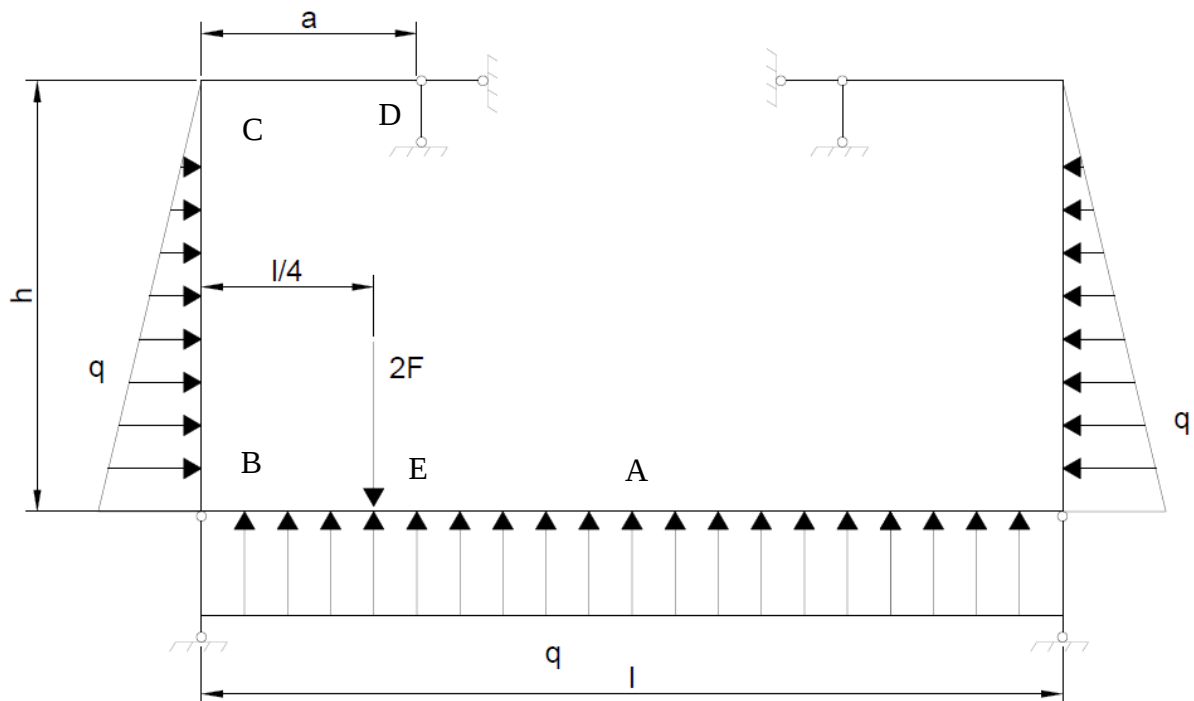
Slika 3.1. Statiki neodređeni sustavi [1]



Slika 3.2. Statički određeni sustavi [1]

4. PRIMJER

Na slici 4.1. prikazan je ravninski okvir koji je po vertikalnom dijelu opterećen linearnom raspodjelom opterećenja, a sa donje strane kontinuiranim opterećenjem konstantnog iznosa, te sa silom koja djeluje na lijevoj četvrtini donjeg nosača. Ovaj primjer se može promatrati kao idealizacija broskog rebra. Kontinuirano opterećenje predstavlja stalan pritisak mora na konstrukciju broda, a sila predstavlja utjecaj teret. Primjer će se riješiti korištenjem metode sila.



Slika 4.1. Ravninski okvir

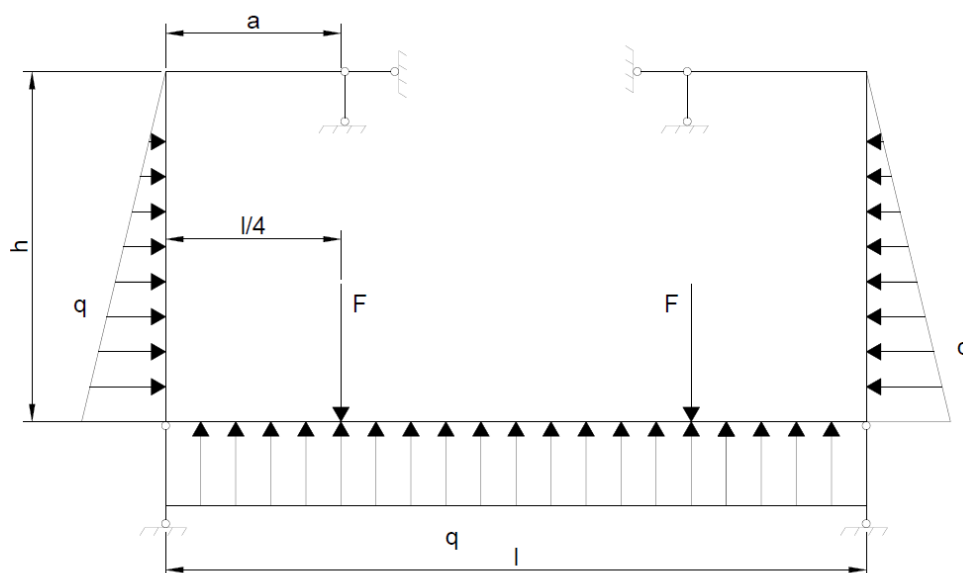
Dobivena rješenja odredit će se s i bez utjecaja smicanja te sa dva različita osnovna sustava kako bi se pokazalo da različiti pristupi vode do istog rješenja. Utjecaj uzdužnih sila će se zanemariti.

4.1. Rješenje

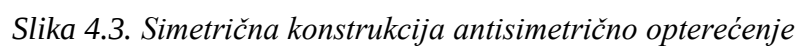
Zbog sile $2F$ sustav se nemože promatrati kao potpuno simetrični, pa se rastavlja na dva slučaja opterećenja (simetrično i antisimetrično) dok konstrukcija ostaje simetrična. Konačna raspodjela unutarnjih sila dobit će se superpozicijom rezultata pojedinih slučajeva opterećenja.

Primjer se rastavlja na dva slučaja kako bi se mogla uzeti u obzir simetričnost konstrukcije. Tako se opterećenje podijelilo na simetrično i antisimetrično kao što je prikazano na slikama 4.2. i 4.3.. Pošto je konstrukcija simetrična, može se promatrati samo jedna polovica sustava, te u ovisnosti kakvo je opterećenje i poštujući pravila za simetričnost i antisimetričnost (koja su opisana u poglavlju 2.4.) može se dobiti raspodjela i na drugoj polovici.

Princip superpozicije je princip nezavisnosti sumiranja djelovanja pojedinih opterećenja na promatrano tijelo. U primjeru opterećenje se rastavlja na simetrično i antisimetrično i primjenom principa superpozicije zbrajaju se vrijednosti momenata savijanja za pojedina opterećenja.



Slika 4.2. Simetrična konstrukcija simetrično opterećenje



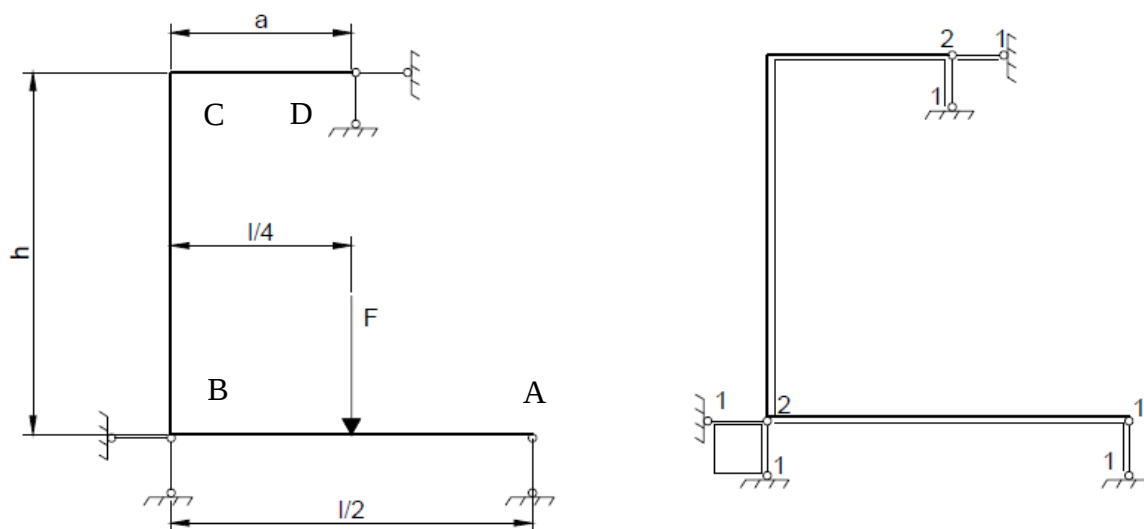
The diagram shows a frame structure with a vertical member of height h and a horizontal member of length $l/2$. The vertical member is subjected to a triangular distributed load with a maximum intensity of q at the base. The horizontal member is subjected to a uniformly distributed load of intensity q . A point load F is applied at the free end of the horizontal member. The frame is supported by a pin support at the base of the vertical member and a roller support at the end of the horizontal member. The dimensions a and $l/4$ are also indicated.

Slika 4.3. Statički neodređeni sustav-simetrično opterećenje

Za ovaj sustav, prema slici 4.3. desno, broj prividnih jednostavnih zglobova iznosi $R = 6$, broj poprečnih translacijskih zglobova $R_Q = 1$ dok je broj zatvorenih kontura $K = 3$, pa je prema izrazu (2.5.):

$$D = 3K - R - R_Q = 3 \cdot 3 - 6 - 1 = 2$$

Pri antisimetričnom opterećenju, u ravnini simetrije uvodi se cilindrični zglob (slika 4.4. lijevo).



Slika 4.4. Statički neodređeni sustav-antisimetrično opterećenje

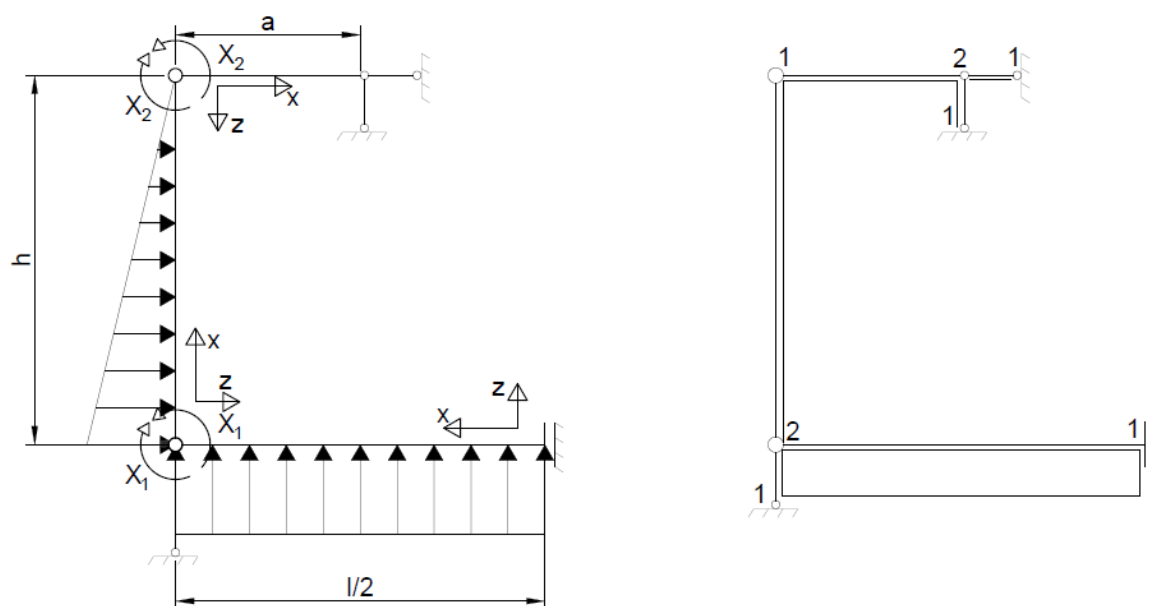
U ovom slučaju, prema slici 4.4. desno, $R = 10$, $R_Q = 0$, $K = 4$, pa je:

$$D = 3K - R - R_Q = 3 \cdot 4 - 10 = 2$$

Kako je prikazano na slici 3.2.d, broj nepoznanica tj. stupnja statičke neodređenosti čitavog problema je $D = 4$. U ovom slučaju, rastavljanjem opterećenja na simetrični i antisimetrični dio, ukupni broj nepoznanica je i dalje $D = 2 + 2 = 4$, ali umjesto sustava s četiri jednadžbe i četiri nepoznanice, rješavaju se 2 sustava s 2 nepoznanice.

Problem će se riješiti za dva osnovna sustava. Jedan je zamjena krutih čvorova u točkama B i C sa cilindričnim zglobom i dodavanjem momenta savijanja na tom mjestu X_1 i X_2 , a drugi je uklanjanje dva oslonca u točki D koje zamjenjujemo sa reakcijskim silama X_3 i X_4 .

4.1.1. Osnovni sustav s cilindričnim zglobovima, bez utjecaja smicanja

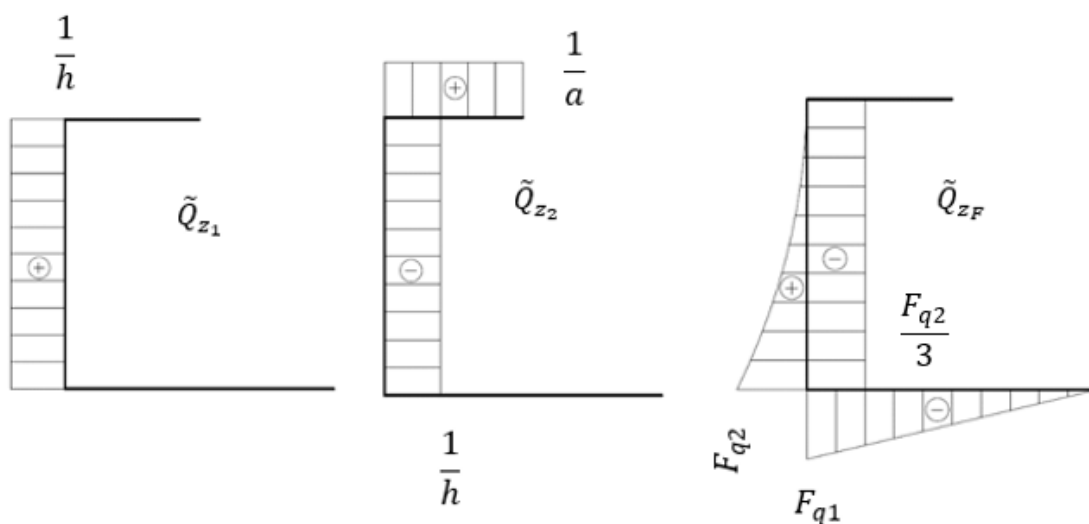


Slika 4.5. Osnovni sustav, raspodijeljeno opterećenje

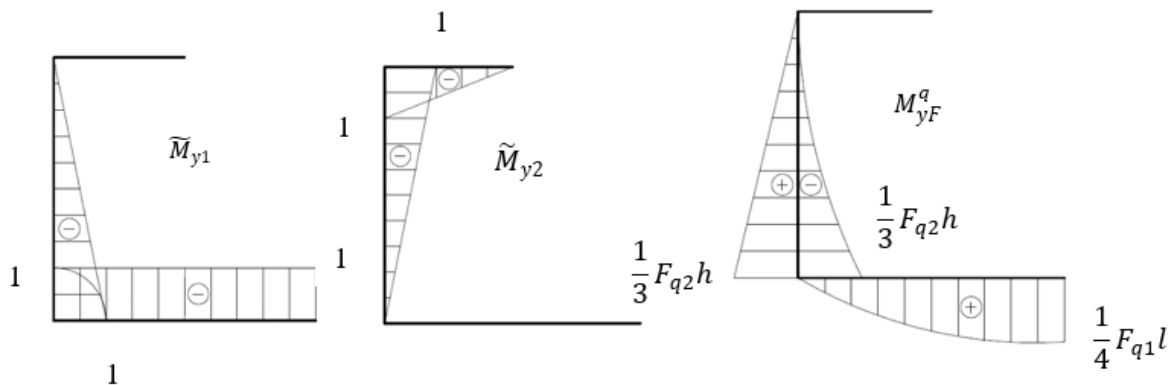
Provjera statičke neodređenosti osnovnog sustava:

$R = 8$, $K = 3$, $R_Q = 1$, pa je prema izrazu (2.5.):

$$D = 3 \cdot 3 - 8 - 1 = 0$$



Slika 4.6. Raspodjele poprečnih sila za usvojeni osnovni sustav



Slika 4.7. Raspodjele momenata savijanja za usvojeni osnovni sustav

Raspodjele su nacrtane odvojeno kako bi se jednostavnije odredio produkt dviju funkcija (jedne proizvoljne i druge linearne). Sve sljedeće produkte dviju funkcija određuju se Vereščaginovim pravilom[1].

Vereščaginovo pravilo

Kako se u izrazima za koeficijente podatnosti i slobodne članove javljaju produkti dviju funkcija, pri integriranju produkta dviju funkcija koristiti će se Vereščaginovo pravilo. Ono glasi:

Određeni integral produkta dviju funkcija od kojih je jedna linearna, a druga proizvoljna jednak je produktu ploštine određene proizvoljnom funkcijom i ordinate funkcije na mjestu gdje ploština određena proizvoljnom funkcijom ima težište[1].

Koeficijenti podatnosti, ako se ne uzima u obzir utjecaj smicanja, računaju se kao:

$$f_{11} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y1} \tilde{M}_{y1}}{EI_y} dx = \frac{1}{EI_1} \left(-1 \cdot \frac{l}{2} \right) (-1) + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h \right) \left(-\frac{2}{3} \right) + 0 = \frac{l}{2EI_1} + \frac{h}{3EI}$$

$$f_{12} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y1} \tilde{M}_{y2}}{EI_y} dx = 0 + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h \right) \left(-\frac{1}{3} \right) + 0 = \frac{h}{6EI}$$

$$f_{22} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y2} \tilde{M}_{y2}}{EI_y} dx = 0 + \frac{1}{EI_1} \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h \right) \left(-\frac{2}{3} \right) + \frac{1}{EI_2} \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot a \right) \left(-\frac{2}{3} \right) \\ = \frac{h}{3EI_1} + \frac{a}{3EI_2}$$

Slobodni članovi:

$$\begin{aligned}
 q_{1F} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y1} M_{yF}^q}{EI_y} dx \\
 &= \frac{1}{EI_1} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{F_{q1} l}{4} \cdot \frac{l}{2} \right) (-1) + \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{F_{q2} h}{3} \cdot h \right) \left(-\frac{2}{3} \right) + \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{F_{q2} h}{3} \cdot h \right) \left(-\frac{4}{5} \right) \right] \\
 &= -\frac{F_{q1} l^2}{12EI_1} - \frac{2F_{q2} h^2}{45EI}
 \end{aligned}$$

$$q_{2F} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y2} M_{yF}}{EI_y} dx = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{F_{q2} h}{3} \cdot h \right) \left(-\frac{1}{3} \right) + \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{F_{q2} h}{3} \cdot h \right) \left(-\frac{1}{5} \right) \right] = -\frac{7F_{q2} h^2}{180EI}$$

Gdje je:

$$F_{q1} = \frac{1}{2}ql, \quad F_{q2} = \frac{1}{2}qh$$

Kanonske jednadžbe za ovaj osnovni sustav glase:

$$f_{11}X_1 + f_{12}X_2 + q_{1F} = 0$$

$$f_{21}X_1 + f_{22}X_2 + q_{2F} = 0$$

A zbog pojednostavljenja proračuna, uvode se konstante:

$$k_1 = \frac{h \cdot I_1}{lI}, \quad k_2 = \frac{al}{hI_2}$$

čime slijedi:

$$(3 + 2k_1)X_1 + k_1X_2 - \frac{1}{2}F_{q1}l - \frac{4}{15}k_1F_{q2}h = 0$$

$$X_1 + 2(1 + k_2)X_2 - \frac{7}{30}F_{q2}h = 0$$

Iz jednadžbi slijedi rješenje za nepoznanice X_1 i X_2 :

$$X_1 = \frac{(1 + k_2)F_{q1}l + \frac{1}{30}F_{q2}hk_1(9 + 16k_2)}{2(1 + k_2)(3 + 2k_1) - k_1}$$

$$X_2 = \frac{-\frac{1}{2}F_{q1}l + \frac{1}{10}F_{q2}h(7 + 2k_1)}{2(1 + k_2)(3 + 2k_1) - k_1}$$

Korištenjem programskog paketa MATLAB i koda priloženog u prilogu, ova i sva sljedeća rješenja su zapisana kako ih je odredio program zbog lakše provjere rezultata. Pa nepoznanice X_1 i X_2 glase:

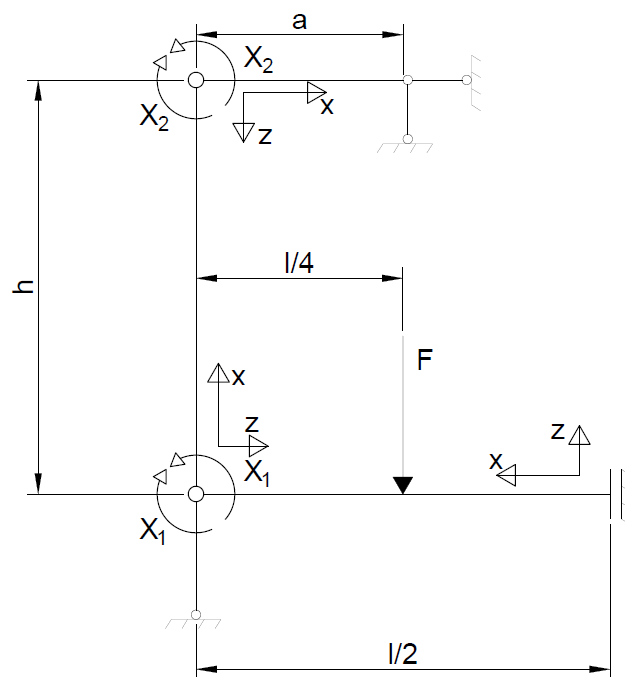
$$X_1 = \frac{30F_{q1}l + 9F_{q2}hk_1 + 30F_{q1}lk_2 + 16F_{q2}hk_1k_2}{30 \cdot (3k_1 + 6k_2 + 4k_1k_2 + 6)}$$

$$X_2 = \frac{7F_{q2}h - 5F_{q1}l + 2F_{q2}hk_1}{30 \cdot (3k_1 + 6k_2 + 4k_1k_2 + 6)}$$

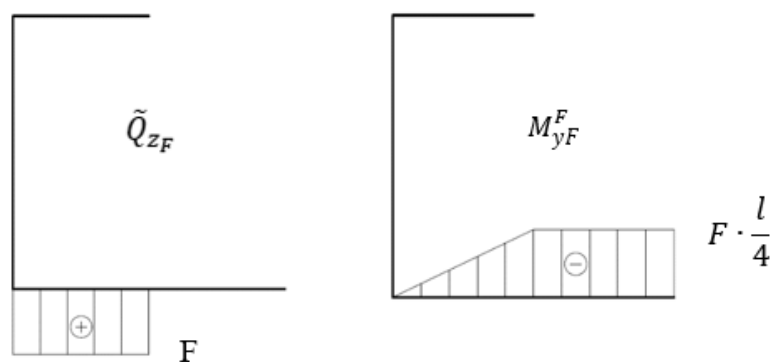
Raspodjela poprečnih sila i momenata savijanja može se dobiti pomoću izraza:

$$Q_z = \widetilde{Q}_{z1} \cdot X_1 + \widetilde{Q}_{z2} \cdot X_2 + Q_{zF}^q$$

$$M_y = \widetilde{M}_{y1}X_1 + \widetilde{M}_{y2}X_2 + M_{yF}^q$$



Slika 4.8. Osnovni sustav, koncentrirano opterećenje



Slika 4.9. Raspodjele za koncentrirano opterećenje

Koeficijenti podatnosti su prethodno određeni i iznose:

$$f_{11} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y1} \tilde{M}_{y1}}{EI_y} dx = \frac{l}{2EI_1} + \frac{h}{3EI}$$

$$f_{12} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y1} \tilde{M}_{y2}}{EI_y} dx = \frac{h}{6EI}$$

$$f_{22} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y2} \tilde{M}_{y2}}{EI_y} dx = \frac{h}{3EI} + \frac{a}{3EI_2}$$

Dok u ovom slučaju slobodni članovi su:

$$q_{1F} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y1} M_{yF}^F}{EI_y} dx = 0 + 0 + \frac{1}{EI_1} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{-F \cdot l}{4} \cdot \frac{l}{4} \right) (-1) + \frac{l}{4} \cdot \left(-F \cdot \frac{l}{4} \right) \right] = \frac{3Fl^2}{32EI_1}$$

$$q_{2F} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y2} M_{yF}^F}{EI_y} dx = 0$$

Pa sustav jednadžbi glasi:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \frac{k_1}{3} \right) X_1 + \left(\frac{k_1}{6} \right) X_2 + \frac{3Fl}{32} &= 0 \\ \left(\frac{k_1}{6} \right) X_1 + \left(\frac{k_1}{3} + \frac{k_1 k_2}{3} \right) X_2 &= 0 \end{aligned}$$

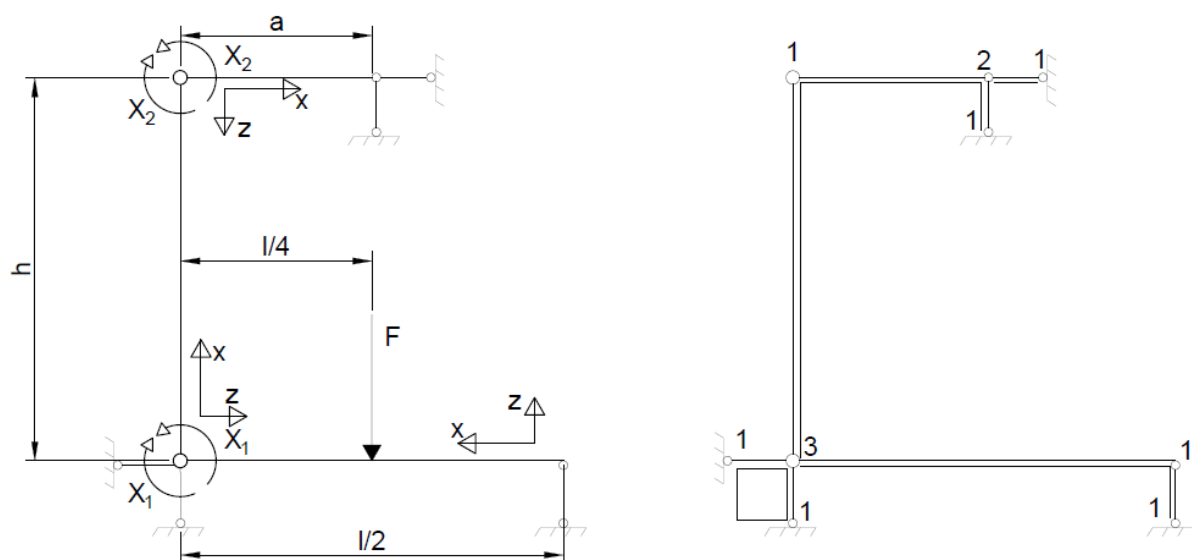
Iz ovih jednadžbi slijedi rješenje za nepoznanice X_1 i X_2 :

$$X_1 = \frac{-9Fl(k_2 + 1)}{8(3k_1 + 6k_2 + 4k_1 k_2 + 6)}$$

$$X_2 = \frac{9Fl}{16(3k_1 + 6k_2 + 4k_1 k_2 + 6)}$$

Raspodjela poprečnih sila i momenata savijanja dobiva se na isti način kao i kod raspodijeljenog opterećenja.

Osnovni sustav pri antisimetričnom opterećenju prikazan je na slici 4.10.

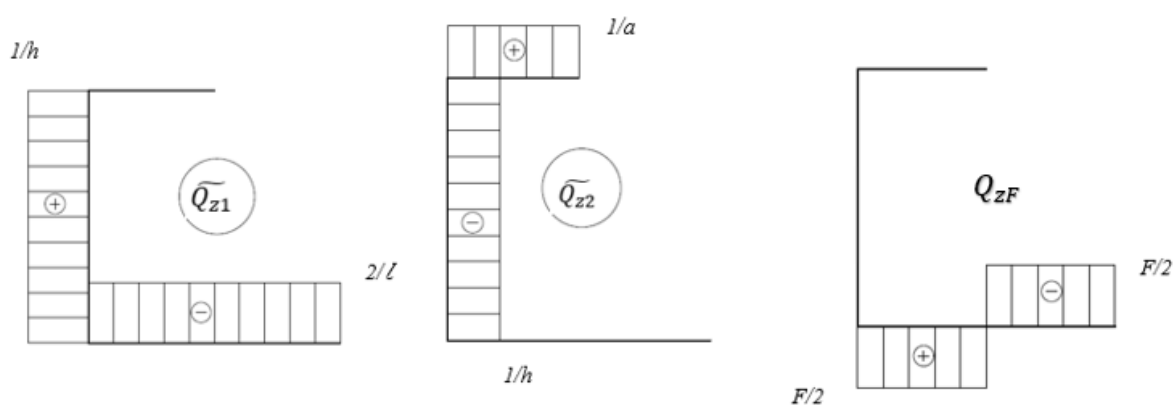


Slika 4.10. Osnovni sustav sa zadanim antisimetričnim koncentriranim silama

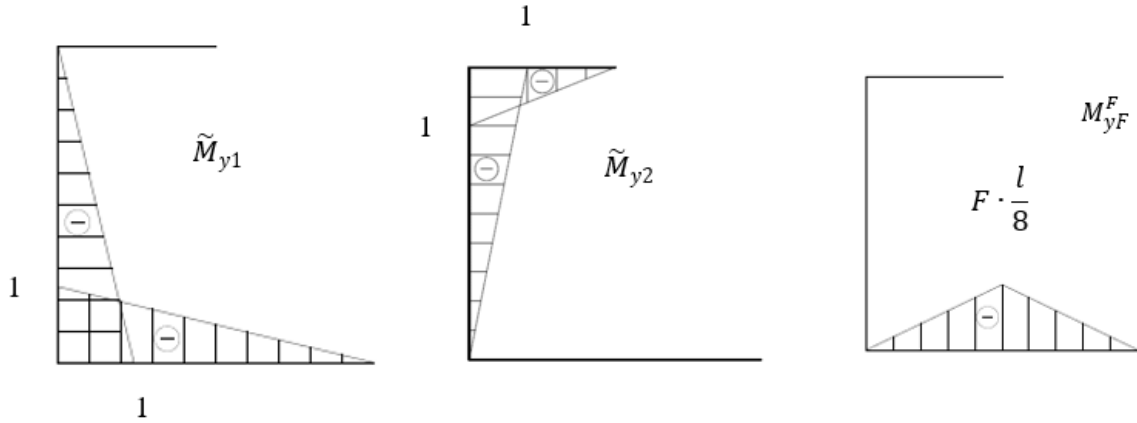
Provjera statičke neodređenosti osnovnog sustava na slici 4.9. desno:

$R = 12$, $K = 4$, $R_Q = 0$, pa je prema izrazu (2.5.):

$$D = 3 \cdot 4 - 12 - 0 = 0$$



Slika 4.11. Raspodjele poprečnih sila za usvojeni osnovni sustav



Slika 4.12. Raspodjele momenata savijanja za usvojeni osnovni sustav

Koeficijenti podatnosti za ovaj osnovni sustav glase:

$$f_{11} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y1} \tilde{M}_{y1}}{EI_y} dx = 0 + \frac{1}{EI_1} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) \right) + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) \right) = \frac{l}{6EI_1} + \frac{h}{3EI}$$

$$f_{12} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y1} \tilde{M}_{y2}}{EI_y} dx = 0 + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \right) + 0 = \frac{h}{6EI}$$

$$f_{22} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y2} \tilde{M}_{y2}}{EI_y} dx = 0 + \frac{1}{EI_1} \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h \right) \left(-\frac{2}{3} \right) + \frac{1}{EI_2} \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot a \right) \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{h}{3EI} + \frac{a}{3EI_2}$$

Dok su slobodni članovi:

$$q_{1F} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y1} M_{yF}}{EI_y} dx = 0 + 0 + \frac{1}{EI_1} \cdot 2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{-F \cdot l}{8} \cdot \frac{l}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \right) \right] = \frac{Fl^2}{64EI_1}$$

$$q_{2F} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y2} M_{yF}}{EI_y} dx = 0$$

Kanonske jednadžbe su iste kao i za raspodijeljeno opterećenje:

$$f_{11}X_1 + f_{12}X_2 + q_{1F} = 0$$

$$f_{21}X_1 + f_{22}X_2 + q_{2F} = 0$$

Pa sustav jednažbi glasi:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{6} + \frac{k_1}{3}\right)X_1 + \left(\frac{k_1}{6}\right)X_2 + \frac{Fl}{64} &= 0 \\ \left(\frac{k_1}{6}\right)X_1 + \left(\frac{k_1}{3} + \frac{1}{3k_3}\right)X_2 &= 0\end{aligned}$$

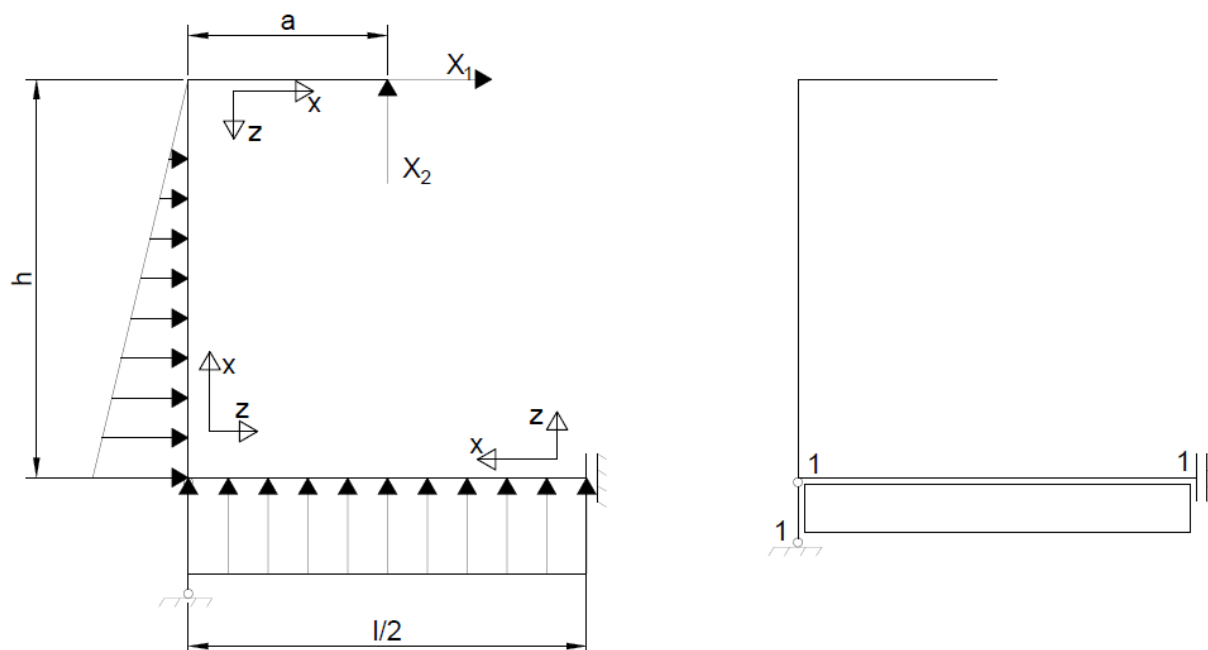
Iz ovih jednažbi slijedi rješenje za nepoznanice X_1 i X_2 :

$$X_1 = \frac{-3Fl(k_1k_3 + 1)}{16(4k_1 + 2k_1k_3 + 3k_1^2k_3 + 2)}$$

$$X_2 = \frac{3Flk_1k_3}{32(4k_1 + 2k_1k_3 + 3k_1^2k_3 + 2)}$$

Raspodjele poprečnih sila i momenata savijanja se dobivaju na isti način kao i pri raspodijeljenom opterećenju:

4.1.2. Osnovni sustav s uklonjenim osloncima u točki D bez utjecaja smicanja

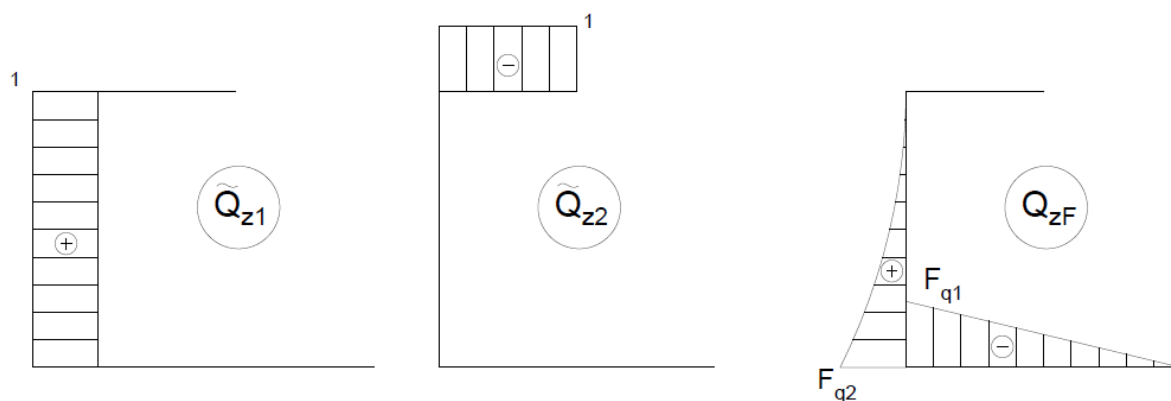


4.13. Osnovni sustav, raspodijeljeno opterećenje

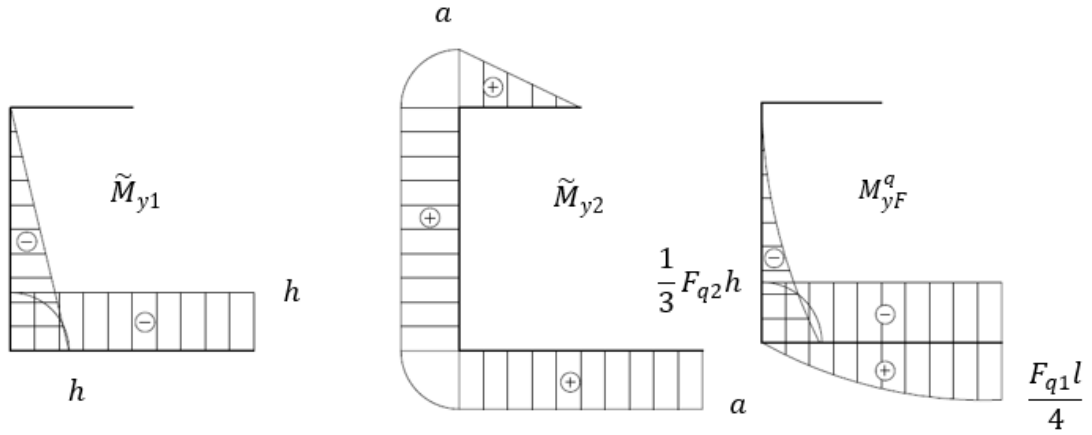
Provjera statičke neodređenosti osnovnog sustava:

$R = 2$, $K = 1$, $R_Q = 1$, pa je prema izrazu (2.5.):

$$D = 3 \cdot 1 - 2 - 1 = 0$$



Slika 4.14. Raspodjela poprečnih sila za usvojeni osnovni sustav



Slika 4.15. Dijagrami momenata savijanja za raspodijeljeno opterećenje

Koeficijenti podatnosti za ovaj osnovni sustav iznose:

$$f_{11} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y1} \tilde{M}_{y1}}{EI_y} dx = 0 + \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot h \cdot h \cdot \left(-\frac{2}{3} h \right) \right] + \frac{1}{EI_1} \left[-h \cdot \frac{l}{2} \cdot (-h) \right] = \frac{h^3}{3EI} + \frac{h^2 l}{2EI_1}$$

$$f_{12} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y1} \tilde{M}_{y2}}{EI_y} dx = 0 + \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot h \cdot h \cdot a \right] + \frac{1}{EI_1} \left[-h \cdot \frac{l}{2} \cdot a \right] = -\frac{h^2 a}{2EI} - \frac{hla}{2EI_1}$$

$$\begin{aligned} f_{22} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y2} \tilde{M}_{y2}}{EI_y} dx = \frac{1}{EI_2} \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \left(\frac{2}{3} a \right) \right] + \frac{1}{EI} [h \cdot a \cdot a] + \frac{1}{EI_1} \left[\frac{l}{2} \cdot a \cdot a \right] \\ &= \frac{a^3}{3EI_2} + \frac{ha^2}{EI} + \frac{la^2}{2EI_1} \end{aligned}$$

Dok su slobodni članovi:

$$\begin{aligned} q_{1F} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y1} M_{yF}}{EI_y} dx = 0 + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{4} \cdot h \cdot \left(-\frac{1}{6} q h^2 \right) \cdot \left(-\frac{4}{5} h \right) \right] + \frac{1}{EI_1} \left[+\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot q \cdot \frac{l^2}{8} \cdot (-h) \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{6} \cdot q \cdot h^2 \cdot \frac{l}{2} \right) \cdot (-h) \right] = \frac{qh^4}{30EI} + \frac{1}{EI_1} \left(-\frac{ql^3 h}{24} + \frac{qh^3 l}{12} \right) \\ &= \frac{F_{q2} h^3}{15EI} + \frac{F_{q1} h}{6EI_1} \left(-\frac{l^2}{2} + h^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{2F} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y2} M_{yF}}{EI_y} dx = 0 + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{4} \cdot h \cdot \left(-\frac{1}{6} \cdot q \cdot h^2 \right) \cdot a \right] \\ &\quad + \frac{1}{EI_1} \left[+\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot q \cdot \frac{l^2}{8} \cdot a + \left(-\frac{1}{6} \cdot q \cdot h^2 \cdot \frac{l}{2} \right) \cdot a \right] \\ &= -\frac{qh^3 a}{24EI} + \frac{1}{EI_1} \left[+\frac{ql^3 a}{24} - \frac{qh^2 la}{12} \right] = -\frac{F_{q2} h^2 a}{12EI} + \frac{F_{q1} a}{6EI_1} \left(\frac{l^2}{2} - h^2 \right) \end{aligned}$$

Kanonske jednadžbe za ovaj osnovni sustav glase:

$$f_{11}X_3 + f_{12}X_4 + q_{1F} = 0$$

$$f_{21}X_3 + f_{22}X_4 + q_{2F} = 0$$

Zbog pojednostavljenja proračuna uvode se konstante k:

$$k_1 = \frac{h \cdot I_1}{lI}, \quad k_2 = \frac{aI}{hI_2}$$

Čime slijedi:

$$\begin{aligned} \left(\frac{h^2}{3}k_1 + \frac{h^2}{2}\right)X_1 + \left(-\frac{ha}{2}k_1 - \frac{ha}{2}\right)X_2 + \left(\frac{qh^3}{30}k_1 - \frac{ql^2h}{24} + \frac{qh^3}{12}\right) &= 0 \\ \left(-\frac{ha}{2}k_1 - \frac{ha}{2}\right)X_1 + \left(\frac{a^2}{3k_3} + k_1a^2 + \frac{a^2}{2}\right)X_2 + \left(-\frac{qh^2a}{24}k_1 + \frac{ql^2a}{24} - \frac{qh^2a}{12}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Iz ovih jednadžbi slijedi rješenje za nepoznanice X_1 i X_2 preko programskog paketa MATLAB:

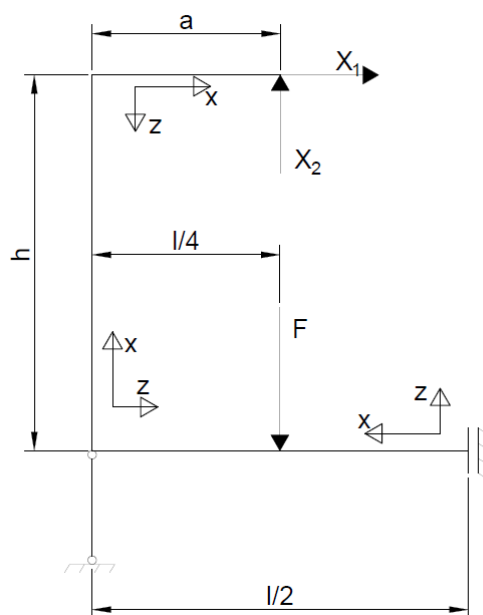
$$X_1 = \frac{-h(F_{q1}(80l^2 - 160h^2 - 60h^2k_3 + 15l^2k_3 - 15l^2k_2k_3) - 64F_{q2}hlk_1 + 30F_{q2}hllk_3 + 36F_{q2}hllk_1^2k_3)}{60 \cdot l(3h^2k_3 - 12k_1k_3 - 32k_1 + 3h^2k_1^2k_3 + 6h^2k_1k_3)}$$

$$X_2 = \frac{k_3(F_{q1}(10h^4k_1 + 10h^4 - 5h^2l^2k_1 - 5h^2l^2 + 10l^2k_1) + F_{q2}(4h^3lk_1^2 + 4h^3lk_1 - 20hllk_1^2 - 20hllk_1))}{10 \cdot l \cdot a(3h^2k_3 - 12k_1k_3 - 32k_1 + 3h^2k_1^2k_3 + 6h^2k_1k_3)}$$

Raspodjele poprečnih sila i momenata savijanja mogu se dobiti pomoću izraza:

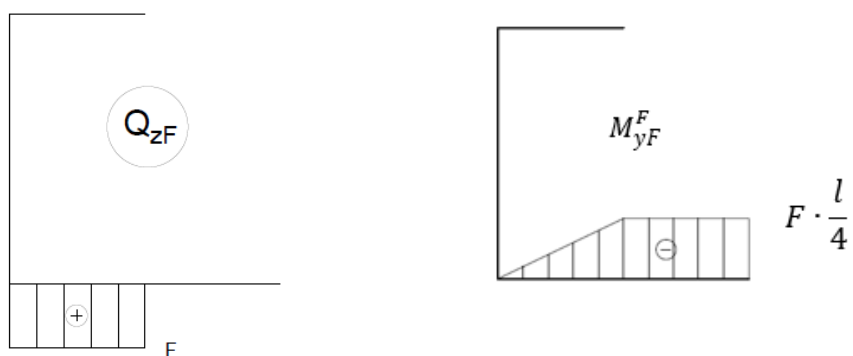
$$Q_z = \widetilde{Q}_{z1}X_1 + \widetilde{Q}_{z2}X_2 + Q_{zF}$$

$$M_y = \widetilde{M}_{y1}X_1 + \widetilde{M}_{y2}X_2 + M_{yF}$$



Slika 4.16. Osnovni sustav, simetrično koncentrirano opterećenje

Zbog jednakosti osnovnog sustava dijagrami zbog jediničnih sila su jednaki, a mijenjaju se samo dijagrami zbog koncentriranog opterećenja.



Slika 4.17. Raspodjele za koncentrirano opterećenje

Koeficijenti podatnosti za ovaj osnovni sustav su već prije određeni i iznose:

$$f_{11} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y1} \tilde{M}_{y1}}{EI_y} dx = \frac{lh^2}{2EI_1} + \frac{h^3}{3EI}$$

$$f_{12} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y1} \tilde{M}_{y2}}{EI_y} dx = \frac{-h^2 a}{2EI} - \frac{hla}{2EI_1}$$

$$f_{22} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y2} \tilde{M}_{y2}}{EI_y} dx = \frac{ha^2}{EI} + \frac{a^3}{3EI_2} + \frac{a^2 \cdot l}{2EI_1}$$

Dok su slobodni članovi:

$$q_{1F} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y1} M_{yF}}{EI_y} dx = 0 + 0 + \frac{1}{EI_1} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{-F \cdot l}{4} \cdot \frac{l}{4} \right) (-h) + \frac{l}{4} \cdot \left(-F \cdot \frac{l}{4} \right) \cdot (-h) \right]$$

$$= \frac{3Fl^2 h}{32EI_1}$$

$$q_{2F} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y2} M_{yF}}{EI_y} dx = 0 + 0 + \frac{1}{EI_1} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot \left(-\frac{Fl}{4} \right) \cdot a + \frac{l}{4} \cdot \left(-\frac{Fl}{4} \right) \cdot a \right] = -\frac{3Fl^2 a}{32EI_1}$$

Kanonske jednadžbe su jednake kao i za sustav raspodijeljenim opterećenjem, pa sustav jednadžbi nakon uvrštenih konstanta k glasi:

$$\left(\frac{h^2}{3} k_1 + \frac{h^2}{2} \right) X_3 + \left(-\frac{ha}{2} k_1 - \frac{ha}{2} \right) X_4 + \frac{3Flh}{32} = 0$$

$$\left(-\frac{ha}{2} k_1 - \frac{ha}{2} \right) X_3 + \left(\frac{a^2}{2} \frac{1}{k_3} + h a k_1 + \frac{a^2}{2} \right) X_4 - \frac{3Fl a}{32} = 0$$

Iz jednadžbi slijedi rješenje za nepoznanice X_1 i X_2 :

$$X_1 = \frac{-9Fl(a + 2hk_1 k_3 - ak_1 k_3)}{16h(3a + 2ak_1 + 6hk_1 k_3 - 4ak_1 k_3 + 4hk_1^2 k_3 - 3ak_1^2 k_3)}$$

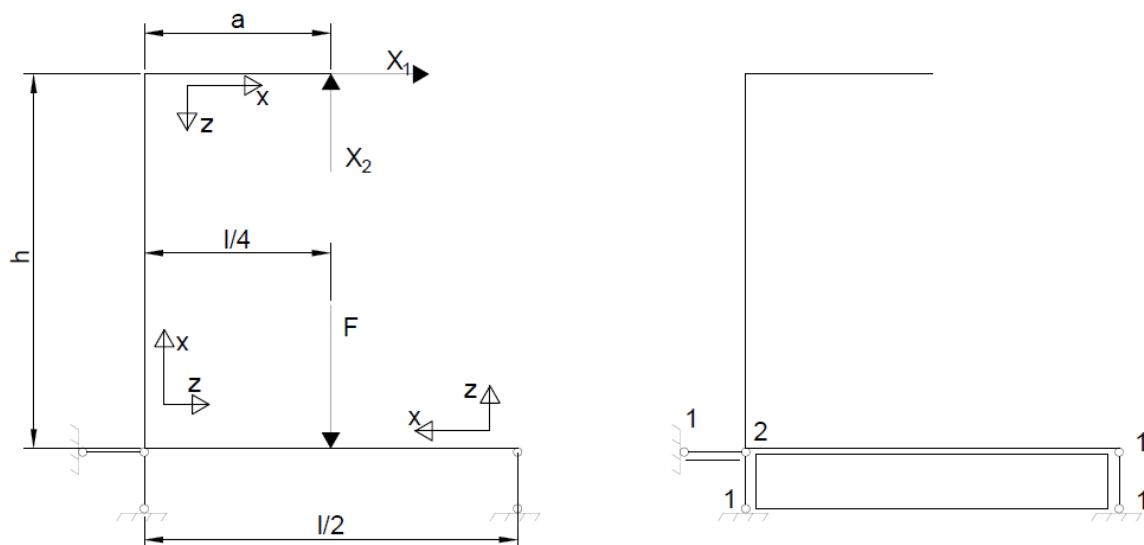
$$X_2 = \frac{-3Flk_1k_3}{16h(3a + 2ak_1 + 6hk_1k_3 - 4ak_1k_3 + 4hk_1^2k_3 - 3ak_1^2k_3)}$$

Raspodjele poprečnih sila i momenata savijanja mogu se dobiti pomoću izraza:

$$Q_z = \widetilde{Q}_{z1}X_1 + \widetilde{Q}_{z2}X_2 + Q_{zF}$$

$$M_y = \widetilde{M}_{y1}X_1 + \widetilde{M}_{y2}X_2 + M_{yF}$$

Na slici 4.18. prikazan je osnovni sustav pri antisimetričnom opterećenju.

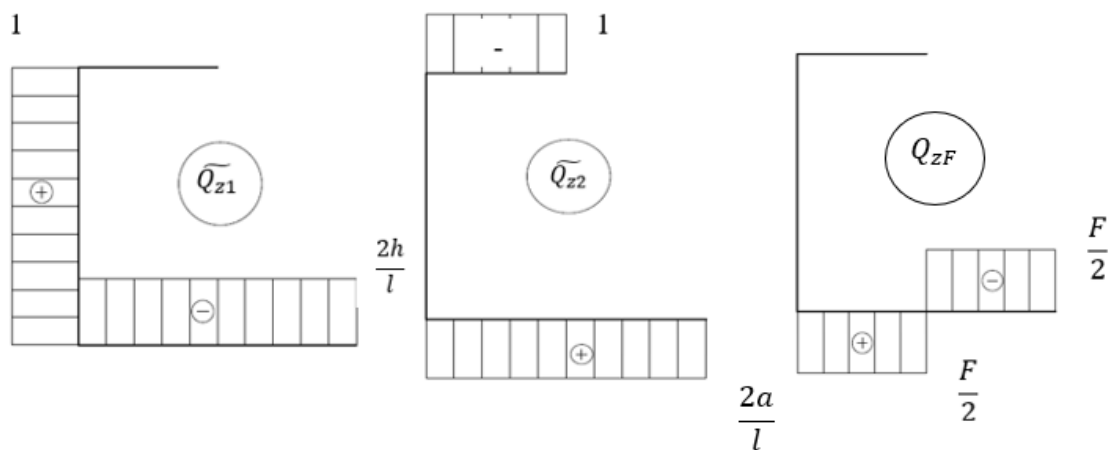


Slika 4.18. Osnovni sustav, antisimetrično opterećenje

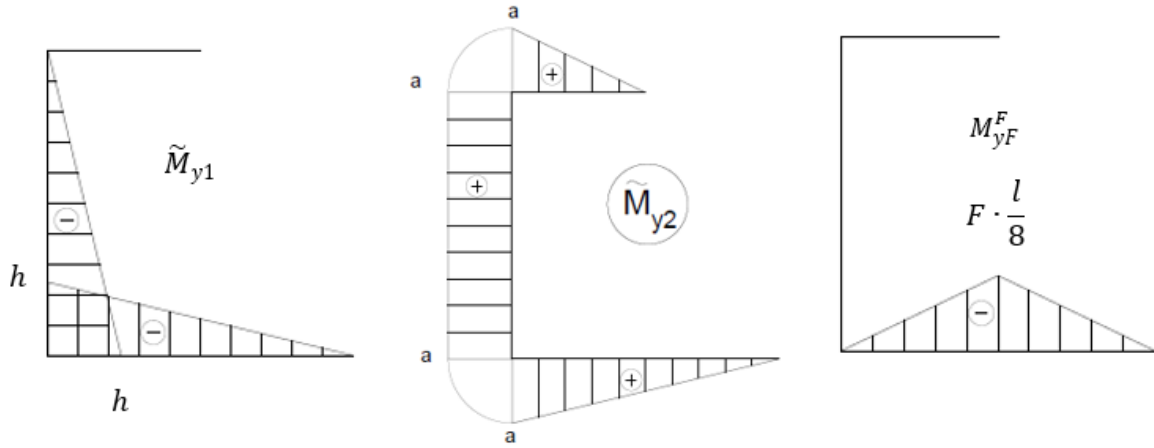
Provjera statičke neodređenosti osnovnog sustava:

$R = 6$, $K = 2$, $R_Q = 0$, pa je prema izrazu (2.5.):

$$D = 3 \cdot 2 - 6 = 0,$$



Slika 4.19. Raspodjela poprečnih sila za usvojeni osnovni sustav



Slika 4.20. Dijagrami momenata savijanja za antisimetrično opterećenje

Koeficijenti podatnosti za ovaj osnovni sustav iznose:

$$f_{11} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y1} \tilde{M}_{y1}}{EI_y} dx = 0 + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot h \cdot (-h) \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot h \right) \right) + \frac{1}{EI_1} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot h \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot h \right) \right)$$

$$= \frac{h^2 l}{6EI_1} + \frac{h^3}{3EI}$$

$$f_{12} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y1} \tilde{M}_{y2}}{EI_y} dx = 0 + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot h \cdot h \cdot a \right) + \frac{1}{EI_1} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot (-h) \cdot \left(\frac{2}{3} a \right) \right] = \frac{-h^2 a}{2EI}$$

$$- \frac{lha}{6EI_1}$$

$$f_{22} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y2} \tilde{M}_{y2}}{EI_y} dx = \frac{1}{EI_2} \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a \right] + \frac{1}{EI_1} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot a \cdot \frac{2}{3} a \right) + \frac{1}{EI} (a \cdot h \cdot a)$$

$$= \frac{a^2 h}{EI} + \frac{a^3}{3EI_2} + \frac{a^2 l}{6EI_1}$$

Dok su slobodni članovi:

$$q_{1F} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y1} M_{yF}}{EI_y} dx = 0 + 0 + \frac{1}{EI_1} \cdot 2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{-F \cdot l}{8} \cdot \frac{l}{4} \cdot \left(-\frac{h}{2} \right) \right) \right] = \frac{Fl^2 h}{64EI_1}$$

$$q_{2F} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \frac{\tilde{M}_{y2} M_{yF}}{EI_y} dx = 0 + 0 + \frac{1}{EI_1} \cdot 2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{-F \cdot l}{8} \cdot \frac{l}{4} \cdot \left(\frac{a}{2} \right) \right) \right] = -\frac{Fl^2 a}{64EI_1}$$

Kanonske jednadžbe su jednake kao i kod sustava sa raspodijeljenim opterećenjem. Pa sustav jednadžbi nakon uvrštenih konstanta k glasi:

$$\begin{aligned}\left(\frac{h^2}{3}k_1 + \frac{h^2}{6}\right)X_1 + \left(-\frac{ha}{2}k_1 - \frac{ha}{6}\right)X_2 + \frac{Flh}{64} &= 0 \\ \left(-\frac{ha}{2}k_1 - \frac{ha}{6}\right)X_1 + \left(\frac{a^2}{3}\frac{1}{k_3} + \frac{ha}{k_3} + \frac{a^2}{6}\right)X_2 - \frac{Fla}{64} &= 0\end{aligned}$$

Iz jednadžbi slijedi rješenje za nepoznanice X_1 i X_2 :

$$X_1 = \frac{-9Fl(6h + 2a - 3ak_1k_3)}{32h(6h + 2a + 12hk_1 + 4ak_1 - 4ak_1k_3 - 9ak_1^2k_3)}$$

$$X_2 = \frac{-9Flk_1k_3}{32h(6h + 2a + 12hk_1 + 4ak_1 - 4ak_1k_3 - 9ak_1^2k_3)}$$

Raspodjele poprečnih sila i momenata savijanja mogu se dobiti pomoću izraza:

$$Q_z = \widetilde{Q}_{z1}X_1 + \widetilde{Q}_{z2}X_2 + Q_{zF}$$

$$M_y = \widetilde{M}_{y1}X_1 + \widetilde{M}_{y2}X_2 + M_{yF}$$

4.1.3. Osnovni sustav s cilindričnim zglobovima sa uključenim utjecajem smicanja

Koeficijenti podatnosti za osnovni sustav na slici 4.5. sa dijagramima za poprečne sile i momente savijanja na slikama 4.6. i 4.7. iznose:

$$\begin{aligned}
 f_{11} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y1} \tilde{M}_{y1}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z1} \tilde{Q}_{z1}}{GA} \right) dx \\
 &= \left\{ \left[\frac{1}{EI_1} \left(-1 \cdot \frac{l}{2} \right) (-1) + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h \right) \left(-\frac{2}{3} \right) + 0 \right] + \left[0 + \frac{\kappa_z}{GA} \cdot \left(\frac{1}{h} \cdot h \cdot \left(\frac{1}{h} \right) \right) \right] \right\} \\
 &= \frac{l}{2EI_1} + \frac{h}{3EI} + \frac{\kappa_z}{hGA} \\
 f_{12} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y1} \tilde{M}_{y2}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z1} \tilde{Q}_{z2}}{GA} \right) dx \\
 &= \left\{ \left[0 + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h \right) \left(-\frac{1}{3} \right) + 0 \right] + \left[0 + \frac{\kappa_z}{GA} \cdot \left(\frac{1}{h} \cdot h \cdot \left(-\frac{1}{h} \right) \right) + 0 \right] \right\} = \frac{h}{6EI} - \frac{\kappa_z}{hGA} \\
 f_{22} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y2} \tilde{M}_{y2}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z2} \tilde{Q}_{z2}}{GA} \right) dx \\
 &= \left\{ \left[0 + \frac{1}{EI_1} \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h \right) \left(-\frac{2}{3} \right) + \frac{1}{EI_2} \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot a \right) \left(-\frac{2}{3} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{\kappa_{z2}}{GA_2} \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot a \cdot \frac{1}{a} \right) + \frac{\kappa_z}{GA} \cdot \left(-\frac{1}{h} \cdot h \cdot \left(-\frac{1}{h} \right) \right) \right] \right\} = \frac{h}{3EI} + \frac{a}{3EI_2} + \frac{\kappa_{z2}}{aGA_2} + \frac{\kappa_z}{hGA}
 \end{aligned}$$

Dok su slobodni članovi:

$$\begin{aligned}
 q_{1F} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y1} M_{yF}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z1} \tilde{Q}_{zF}}{GA} \right) dx \\
 &= \left\{ \left[\frac{1}{EI_1} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{F_{q1} l}{4} \cdot \frac{l}{2} \right) (-1) + \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{F_{q2} h}{3} \cdot h \right) \left(-\frac{2}{3} \right) + \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{F_{q2} h}{3} \cdot h \right) \left(-\frac{4}{5} \right) \right] \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[0 + \frac{\kappa_z}{GA} \cdot \left[\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} qh \cdot h \cdot \frac{1}{h} \right) + \left(-\frac{1}{6} qh \cdot h \cdot \frac{1}{h} \right) \right] \right] \right\} = -\frac{F_{q1} l^2}{12EI_1} - \frac{2F_{q2} h^2}{45EI} \\
 q_{2F} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y1} M_{yF}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z2} \tilde{Q}_{zF}}{GA} \right) dx \\
 &= \left\{ \left[\frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{F_{q2} h}{3} \cdot h \right) \left(-\frac{1}{3} \right) + \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{F_{q2} h}{3} \cdot h \right) \left(-\frac{1}{5} \right) \right] \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[0 + \frac{\kappa_z}{GA} \cdot \left[\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} qh \cdot h \cdot \left(-\frac{1}{h} \right) \right) + \left(-\frac{1}{6} qh \cdot h \cdot \left(-\frac{1}{h} \right) \right) \right] \right] \right\} = -\frac{7F_{q2} h^2}{180EI}
 \end{aligned}$$

Kanonske jednadžbe su jednake kao i kod osnovnog sustava sa raspodijeljenim opterećenjem bez utjecaja smicanja.

Uvode se konstante k zbog pojednostavljenja daljnjeg proračuna:

$$k_1 = \frac{h \cdot I_1}{lI}, \quad k_2 = \frac{aI}{hI_2}, \quad k_3 = \frac{lEI_2}{aEI_1}, \quad k_{s1} = \frac{\kappa_{z1}EI_1}{GA_1l^2}, \quad k_{s2} = \frac{\kappa_{z2}EI_2}{GA_2a^2}, \quad k_{s3} = \frac{\kappa_zEI}{GAh^2}$$

Pa slijede jednadžbe:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot k_1 + k_{s3} \cdot k_1\right) X_1 + \left(\frac{1}{6} k_1 - k_{s3} \cdot k_1\right) X_2 - \left(\frac{ql^2}{24} + \frac{qh^2}{45} \cdot k_1\right) &= 0 \\ \left(\frac{1}{6} k_1 - k_{s3} \cdot k_1\right) X_1 + \left(\frac{1}{3} k_1 - \frac{1}{3k_3} + k_{s2} \cdot \frac{1}{k_3} + k_1 k_{s3}\right) X_2 - \frac{7}{360} qh^2 k_1 &= 0 \end{aligned}$$

Iz kojih slijedi:

$$X_1 = \frac{F_{q1}(90lk_{s2} - 30l + 30lk_1k_3 + 90lk_1k_3k_{s3}) + F_{q2}(-16hk_1 + 23hk_1^2k_3 + 48hk_1k_{s2} + 6hk_1^2k_3k_{s3})}{30(18k_{s2} - 4k_1 + 6k_1k_3 + 12k_1k_{s2} - 12k_1k_{s3} + 3k_1^2k_3 + 36k_1^2k_3k_{s3} + 18k_1k_3k_{s3} + 36k_1k_{s2}k_{s3} - 6)}$$

$$X_2 = \frac{-k_1k_3(21F_{q2}h + 15F_{q1}l + 22F_{q2}hk_1 - 90F_{q1}lk_{s3} - 6F_{q2}hk_1k_{s3})}{30(18k_{s2} - 4k_1 + 6k_1k_3 + 12k_1k_{s2} - 12k_1k_{s3} + 3k_1^2k_3 + 36k_1^2k_3k_{s3} + 18k_1k_3k_{s3} + 36k_1k_{s2}k_{s3} - 6)}$$

Raspodjele poprečnih sila i momenata savijanja mogu se dobiti pomoću izraza:

$$Q_z = \widetilde{Q}_{z1}X_1 + \widetilde{Q}_{z2}X_2 + Q_{zF}$$

$$M_y = \widetilde{M}_{y1}X_1 + \widetilde{M}_{y2}X_2 + M_{yF}$$

Za osnovni sustav na slici 4.8. uz uključen utjecaj smicanja, koeficijenti podatnosti su prethodno određeni kod simetričnog raspodijeljenog opterećenja i iznose:

$$f_{11} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y1} \tilde{M}_{y1}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z1} \tilde{Q}_{z1}}{GA} \right) dx = \frac{l}{2EI_1} + \frac{h}{3EI} + \frac{\kappa_z}{hGA}$$

$$f_{12} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y1} \tilde{M}_{y2}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z1} \tilde{Q}_{z2}}{GA} \right) dx = \frac{h}{6EI} - \frac{\kappa_z}{hGA}$$

$$f_{22} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y2} \tilde{M}_{y2}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z2} \tilde{Q}_{z2}}{GA} \right) dx = \frac{h}{3EI} + \frac{a}{3EI_2} + \frac{\kappa_{z2}}{aGA_2} + \frac{\kappa_z}{hGA}$$

Dok su slobodni članovi:

$$q_{1F} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y1} M_{yF}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z1} \tilde{Q}_{zF}}{GA} \right) dx$$

$$= \left\{ 0 + 0 + \frac{1}{EI_1} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{-F \cdot l}{4} \cdot \frac{l}{4} \right) (-h) + \frac{l}{4} \cdot \left(-F \cdot \frac{l}{4} \right) \cdot (-h) \right] + [0] \right\}$$

$$= \frac{3Fl^2}{32EI_1}$$

$$q_{2F} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y2} M_{yF}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z2} \tilde{Q}_{zF}}{GA} \right) dx = 0$$

Kanonske jednadžbe su jednake kao i kod raspodijeljenog opterećenja. Uvrštenjem konstanti k zbog pojednostavljivanja daljnjeg proračuna jednadžbe glase:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot k_1 + k_{s1} \cdot \frac{l}{h} \right) X_1 + \left(\frac{1}{6} k_1 - k_{s3} \cdot k_1 \right) X_2 - \left(\frac{3Flh}{32} \right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{6} k_1 - k_{s3} \cdot k_1 \right) X_1 + \left(\frac{1}{3} k_1 - \frac{a}{3} k_1 k_2 + k_{s2} \cdot k_1 k_2 \right) X_2 = 0$$

Iz ovih jednadžbi slijedi:

$$X_1 = \frac{9Fhl(3k_{s2} + k_1 k_3 + 3k_1 k_3 k_{s3} - 1)}{8(18k_{s2} - 4k_1 + 6k_1 k_3 + 12k_1 k_{s2} - 12k_1 k_{s3} + 3k_1^2 k_3 + 36k_1^2 k_3 k_{s3} + 18k_1 k_3 k_{s3} + 36k_1 k_{s2} k_{s3} - 6)}$$

$$X_2 = \frac{9Fhlk_1k_3(6k_{s3} - 1)}{16(18k_{s2} - 4k_1 + 6k_1k_3 + 12k_1k_{s2} - 12k_1k_{s3} + 3k_1^2k_3 + 36k_1^2k_3k_{s3} + 18k_1k_3k_{s3} + 36k_1k_{s2}k_{s3} - 6)}$$

Raspodjele poprečnih sila i momenata savijanja mogu se dobiti pomoću izraza:

$$Q_z = \widetilde{Q}_{z1}X_1 + \widetilde{Q}_{z2}X_2 + Q_{zF}$$

$$M_y = \widetilde{M}_{y1}X_1 + \widetilde{M}_{y2}X_2 + M_{yF}$$

Kod osnovnog sustava za antisimetrično opterećenje na slici 4.10., uz uključen utjecaj smicanja, koeficijenti podatnosti iznose:

$$\begin{aligned}
 f_{11} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y1} \tilde{M}_{y1}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z1} \tilde{Q}_{z1}}{GA} \right) dx \\
 &= \left\{ \left[0 + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot h \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{-2}{3} \right) \right) + \frac{1}{EI_1} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot 1 \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot h \right) \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[0 + \frac{\kappa_z}{GA} \cdot \left(\frac{1}{h} \cdot h \cdot \frac{1}{h} \right) + \frac{\kappa_{z1}}{GA_1} \cdot \left(-\frac{2}{l} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{-2}{l} \right) \right] \right\} = \frac{l}{6EI_1} + \frac{h}{3EI} + \frac{\kappa_z}{hGA} + \frac{2\kappa_{z1}}{lGA_1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{12} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y1} \tilde{M}_{y2}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z1} \tilde{Q}_{z2}}{GA} \right) dx \\
 &= \left\{ \left[0 + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h \cdot \frac{-1}{3} \right) + 0 \right] + \left[0 + \frac{\kappa_z}{GA} \cdot \left(\frac{1}{h} \cdot h \cdot \frac{-1}{h} \right) \right] \right\} = \frac{h}{6EI} - \frac{\kappa_z}{hGA}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{22} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y2} \tilde{M}_{y2}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z2} \tilde{Q}_{z2}}{GA} \right) dx \\
 &= \left\{ \left[\frac{1}{EI_2} \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot (-1) \cdot \frac{-2}{3} \right] + 0 + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot h \cdot \left(\frac{-2}{3} \right) \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{\kappa_{z2}}{GA_2} \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot a \cdot \frac{1}{a} \right) + \frac{\kappa_z}{GA} \cdot \left(-\frac{1}{h} \cdot h \cdot \left(\frac{-1}{h} \right) \right) \right] \right\} = \frac{h}{3EI} + \frac{a}{3EI_2} + \frac{\kappa_{z2}}{aGA_2} + \frac{\kappa_z}{hGA}
 \end{aligned}$$

Dok su slobodni članovi:

$$\begin{aligned}
 q_{1F} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y1} M_{yF}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_1 \tilde{Q}_{zF}}{GA} \right) dx \\
 &= \left[0 + 0 + \frac{1}{EI_1} \cdot 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-F \cdot l}{8} \cdot \frac{l}{4} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) \right] \right] \\
 &\quad + \left[\frac{\kappa_{z1}}{GA_1} \cdot \left(\frac{F}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot \left(-\frac{2}{l} \right) + \left(\frac{-F}{2} \right) \cdot \frac{l}{4} \cdot \left(-\frac{2}{l} \right) \right) \right] = \frac{Fl^2}{64EI_1}
 \end{aligned}$$

$$q_{2F} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y2} M_{yF}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_2 \tilde{Q}_{zF}}{GA} \right) dx = 0$$

Kanonske jednađbe su jednake kao kod simetričnog opterećenja.

Nakon uvrštavanja konstanti k jednađbe glase:

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{k_1}{3} + k_{s3}k_1 + 2k_{s1}\right)X_1 + \left(\frac{1}{6}k_1 - k_{s3}k_1\right)X_2 + \left(\frac{Fl}{6} + \frac{Fl}{2}k_{s1}\right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{6}k_1 - k_{s3}k_1\right)X_1 + \left(\frac{k_1}{3} + \frac{1}{3k_3} + k_{s2}\frac{1}{k_3} + k_1k_{s3}\right)X_2 = 0$$

Iz ovih jednađbi slijedi:

$$X_1 = \frac{-2Fl(3k_{s1} + 1)(3k_{s2} + k_1k_3 + 3k_1k_3k_{s3} - 1)}{k_1(k_3 \cdot z - 4 + k_{s2}(12 + 36k_{s3}) - 12k_{s3}) + 6k_{s2} - 48k_{s1} + 144k_{s1}k_{s2} - 2}$$

$$X_2 = \frac{-Flk_1k_3(3k_{s1} + 1)(6k_{s3} - 1)}{k_1(k_3 \cdot z - 4 + k_{s2}(12 + 36k_{s3}) - 12k_{s3}) + 6k_{s2} - 48k_{s1} + 144k_{s1}k_{s2} - 2}$$

gdje je z:

$$z = (2 + 3k_1 + 36k_1k_{s3} + 48k_{s1} + 6k_{s3} + 144k_{s1}k_{s3})$$

Raspodjele poprečnih sila i momenata savijanja mogu se dobiti pomoću izraza:

$$Q_z = \widetilde{Q}_{z1}X_1 + \widetilde{Q}_{z2}X_2 + Q_{zF}$$

$$M_y = \widetilde{M}_{y1}X_1 + \widetilde{M}_{y2}X_2 + M_{yF}$$

4.1.4. Osnovni sustav u uklonjenim osloncima u točki D s uključenim utjecajem smicanja

Za osnovni sustav na slici 4.13., uz uključen utjecaj smicanja, koeficijenti podatnosti iznose:

$$\begin{aligned}
 f_{11} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y1} \tilde{M}_{y1}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z1} \tilde{Q}_{z1}}{GA} \right) dx \\
 &= \left\{ \left[0 + \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot h \cdot h \cdot \left(-\frac{2}{3} h \right) \right] + \frac{1}{EI_1} \left[-h \cdot \frac{l}{2} \cdot (-h) \right] \right] + \left[0 + \frac{\kappa_z}{GA} \cdot (1 \cdot h \cdot 1) \right] \right\} \\
 &= \frac{h^3}{3EI} + \frac{h^2 l}{2EI_1} + \frac{h \kappa_z}{GA}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{12} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y1} \tilde{M}_{y2}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z1} \tilde{Q}_{z2}}{GA} \right) dx \\
 &= \left\{ \left[0 + \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot h \cdot h \cdot a \right] + \frac{1}{EI_1} \left[-h \cdot \frac{l}{2} \cdot a \right] \right] + [0 + 0 + 0] \right\} = -\frac{h^2 a}{2EI} - \frac{h l a}{2EI_1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{22} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y2} \tilde{M}_{y2}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z2} \tilde{Q}_{z2}}{GA} \right) dx \\
 &= \left\{ \left[\frac{1}{EI_2} \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \left(\frac{2}{3} a \right) \right] + \frac{1}{EI} [h \cdot a \cdot a] + \frac{1}{EI_1} \left[\frac{l}{2} \cdot a \cdot a \right] \right] + \left[\frac{\kappa_{z2}}{GA_2} \cdot (-1 \cdot a \cdot (-1)) \right] \right\} \\
 &= \frac{a^3}{3EI_2} + \frac{h a^2}{EI} + \frac{l a^2}{2EI_1} + \frac{a \kappa_{z2}}{GA_2}
 \end{aligned}$$

Dok su slobodni članovi:

$$\begin{aligned}
 q_{1F} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y1} M_{yF}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z2} \tilde{Q}_{zF}}{GA} \right) dx \\
 &= \left\{ \left[0 + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{4} \cdot h \cdot \left(-\frac{1}{6} q h^2 \right) \cdot \left(-\frac{4}{5} h \right) \right] + \frac{1}{EI_1} \right. \right. \\
 &\quad \cdot \left. \left[+\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot q \cdot \frac{l^2}{8} \cdot (-h) + \left(-\frac{1}{6} \cdot q \cdot h^2 \cdot \frac{l}{2} \right) \cdot (-h) \right] \right] + \left[\frac{\kappa_z}{GA} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} q h \cdot h \cdot 1 \right) \right] \right\} \\
 &= \frac{q h^4}{30EI} + \frac{1}{EI_1} \left(-\frac{q l^3 h}{24} + \frac{q h^3 l}{12} \right) + \frac{q h^2 \kappa_z}{6GA}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{2F} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y1} M_{yF}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z2} \tilde{Q}_{zF}}{GA} \right) dx \\
 &= \left\{ \left[0 + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{4} \cdot h \cdot \left(-\frac{1}{6} \cdot q \cdot h^2 \right) \cdot a \right] + \frac{1}{EI_1} \left[+\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot q \cdot \frac{l^2}{8} \cdot a + \left(-\frac{1}{6} \cdot q \cdot h^2 \cdot \frac{l}{2} \right) \cdot a \right] \right] \right. \\
 &\quad \left. + 0 \right\} = -\frac{q h^3 a}{24EI} + \frac{1}{EI_1} \left[+\frac{q l^3 a}{24} - \frac{q h^2 l a}{12} \right]
 \end{aligned}$$

Kanonske jednadžbe su jednake kao i kod sustava bez utjecaja smicanja:

Uvrštenjem konstanti k slijede jednadžbe:

$$\left(\frac{h^2}{3}k_1 + \frac{h^2}{2} + h^2k_1k_{s3}\right)X_1 + \left(-\frac{ha}{2}k_1 - \frac{ha}{2}\right)X_2 + \left(\frac{qh^3}{30}k_1 - \frac{ql^2h}{24} + \frac{qh^3}{12} + k_{s3}\frac{qh^2}{6}k_1\right) = 0$$

$$\left(-\frac{ha}{2}k_1 - \frac{ha}{2}\right)X_1 + \left(\frac{a^2}{3k_3} + a^2k_1 + \frac{a^2}{2} + k_{s2}\frac{a^2}{k_3}\right)X_2 + \left(-\frac{qh^2a}{24}k_1 + \frac{ql^2a}{24} - \frac{qh^2a}{12}\right) = 0$$

Iz ovih jednadžbi slijedi:

$$X_1 = \frac{-\left(F_{q1}l(-10 - 30k_{s2} - 15k_1k_3) + F_{q2}h(20 + k_1 \cdot z + 60k_{s2})\right)}{[10h(k_1(4 + 6k_3 + 12k_{s2} + 12k_{s3} + 3k_1k_3 + 36k_1k_3k_{s3} + 18k_3k_{s3} + 36k_{s2}k_{s3}) + 18k_{s2} + 6)]}$$

$$X_2 = \frac{-[k_1k_3(7F_{q2}h - 5F_{q1}l + 2F_{q2}hk_1 + 30F_{q1}lk_{s3} + 30F_{q2}hk_1k_{s3})]}{[10a(k_1(4 + 6k_3 + 12k_{s2} + 12k_{s3} + 3k_1k_3 + 36k_1k_3k_{s3} + 18k_3k_{s3} + 36k_{s2}k_{s3}) + 18k_{s2} + 6)]}$$

Gdje je

$$z = (8 + 9k_1k_3 + 27k_3 + 24k_{s2} + 40k_{s3} + 60k_3k_{s3} + 120k_{s2}k_{s3} + 120k_1k_3k_{s3})$$

Raspodjele poprečnih sila i momenata savijanja mogu se dobiti pomoću izraza:

$$Q_z = \widetilde{Q}_{z1}X_1 + \widetilde{Q}_{z2}X_2 + Q_{zF}$$

$$M_y = \widetilde{M}_{y1}X_1 + \widetilde{M}_{y2}X_2 + M_{yF}$$

Za osnovni sustav na slici 4.16., uz uključen utjecaj smicanja koeficijenti podatnosti su već prethodno određeni i iznose:

$$f_{11} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y1} \tilde{M}_{y1}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z1} \tilde{Q}_{z1}}{GA} \right) dx + \frac{h^2 l}{2EI_1} + \frac{a \kappa_z}{GA}$$

$$f_{12} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y1} \tilde{M}_{y2}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z1} \tilde{Q}_{z2}}{GA} \right) dx = -\frac{h^2 a}{2EI} - \frac{hla}{2EI_1}$$

$$f_{22} = \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y2} \tilde{M}_{y2}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z2} \tilde{Q}_{z2}}{GA} \right) dx = \frac{a^3}{3EI_2} + \frac{ha^2}{EI} + \frac{la^2}{2EI_1} + \frac{a \kappa_{z2}}{GA_2}$$

Dok su slobodni članovi:

$$\begin{aligned} q_{1F} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y1} M_{yF}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z2} \tilde{Q}_{zF}}{GA} \right) dx \\ &= \left\{ 0 + 0 + \frac{1}{EI_1} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{-F \cdot l}{4} \cdot \frac{l}{4} \right) (-h) + \frac{l}{4} \cdot \left(-F \cdot \frac{l}{4} \right) \cdot (-h) \right] \right\} = \frac{3Fl^2 h}{32EI_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{2F} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y2} M_{yF}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z2} \tilde{Q}_{zF}}{GA} \right) dx \\ &= \left\{ 0 + 0 + \frac{1}{EI_1} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot \left(-\frac{Fl}{4} \right) \cdot a + \frac{l}{4} \cdot \left(-\frac{Fl}{4} \right) \cdot a \right] + 0 \right\} = -\frac{3Fl^2 a}{32EI_1} \end{aligned}$$

Kanonske jednadžbe su jednake kao i kod raspodijeljenog opterećenja i uvrštavanjem konstanti k slijede jednadžbe:

$$\begin{aligned} \left(k_1 \frac{h^3}{3} + \frac{h^2}{2} + k_1 k_{s3} h^2 \right) X_1 + \left(-\frac{ha}{2} k_1 - \frac{ha}{2} \right) X_2 + \frac{3Flh}{32} &= 0 \\ \left(-\frac{ha}{2} k_1 - \frac{ha}{2} \right) X_1 + \left(\frac{1}{k_3} \cdot \frac{a^2}{3} + a^2 k_1 + \frac{a^2}{2} + k_{s2} \frac{a^2}{k_3} \right) X_2 + \left(-\frac{3Fla}{32} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Iz ovih jednadžbi slijedi:

$$X_1 = \frac{-9Fhl(6k_{s2} + 3k_1 k_3 + 2)}{16(k_1 \cdot s + 18h^2 k_{s2} + 6h^2 + 12lak_{s1} + 18lak_3 k_{s1} + 36lak_{s1} k_{s2})}$$

$$X_2 = \frac{-9Flk_3(k_1h - 6lak_{s1})}{16a(k_1 \cdot s + 18h^2k_{s2} + 6h^2 + 12lak_{s1} + 18lak_3k_{s1} + 36lak_{s1}k_{s2})}$$

Gdje je

$$s = (4h^2 + 3h^2k_1k_3 + 6h^2k_3 + 12h^2k_{s2} + 36lak_3k_{s1})$$

Raspodjele poprečnih sila i momenata savijanja mogu se dobiti pomoću izraza:

$$Q_z = \widetilde{Q}_{z1}X_1 + \widetilde{Q}_{z2}X_2 + Q_{zF}$$

$$M_y = \widetilde{M}_{y1}X_1 + \widetilde{M}_{y2}X_2 + M_{yF}$$

Za osnovni sustav na slici 4.18., sa antisimetričnim opterećenjem uz uključen utjecaj smicanja koeficijenti podatnosti iznose:

$$\begin{aligned}
 f_{11} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y1} \tilde{M}_{y1}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z1} \tilde{Q}_{z1}}{GA} \right) dx \\
 &= \left\{ \left[0 + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot h \cdot (-h) \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot h \right) \right) + \frac{1}{EI_1} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot h \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot h \right) \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[0 + \frac{\kappa_z}{GA} \cdot (1 \cdot h \cdot 1) + \frac{\kappa_{z1}}{GA_1} \cdot \left(-\frac{h}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{-h}{2} \right) \right] \right\} \\
 &= \frac{h^2 l}{6EI_1} + \frac{h^3}{3EI} + \frac{h\kappa_z}{GA} + \frac{h^2 \kappa_{z1}}{\frac{l}{2} GA_1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{12} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y1} \tilde{M}_{y2}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z1} \tilde{Q}_{z2}}{GA} \right) dx \\
 &= \left\{ \left[0 + \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h \cdot a \right) + \frac{1}{EI_1} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot (-h) \cdot \left(\frac{2}{3} a \right) \right] \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[0 + 0 + \frac{\kappa_{z1}}{GA_1} \cdot \left(-\frac{h}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{a}{2} \right) \right] \right\} = \frac{-h^2 a}{2EI} - \frac{lha}{6EI_1} - \frac{h\kappa_{z1}}{\frac{l}{2} GA_1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{22} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y2} \tilde{M}_{y2}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z2} \tilde{Q}_{z2}}{GA} \right) dx \\
 &= \left\{ \left[\frac{1}{EI_2} \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a \right] + \frac{1}{EI_1} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot a \cdot \frac{2}{3} a \right) + \frac{1}{EI} (a \cdot h \cdot a) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{\kappa_{z2}}{GA_2} \cdot (-1 \cdot a \cdot (-1)) + 0 + \frac{\kappa_{z1}}{GA_1} \cdot \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{a}{2} \right) \right] \right\} \\
 &= \frac{a^2 h}{EI} + \frac{a^3}{3EI_2} + \frac{a^2 l}{6EI_1} + \frac{a\kappa_{z2}}{GA_2} + \frac{a^2 \kappa_{z1}}{\frac{l}{2} GA_1}
 \end{aligned}$$

Dok su slobodni članovi:

$$\begin{aligned}
 q_{1F} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y1} M_{yF}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z2} \tilde{Q}_{zF}}{GA} \right) dx \\
 &= \left\{ \left[0 + 0 + \frac{1}{EI_1} \cdot 2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{-F \cdot l}{8} \cdot \frac{l}{4} \cdot \left(-\frac{h}{2} \right) \right) \right] \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{\kappa_{z1}}{GA_1} \cdot \left(\left(\frac{F}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{-h}{l} \right) + \left(-\frac{F}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{-h}{l} \right) \right) \right] \right\} = \frac{Fl^2 h}{64EI_1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_{2F} &= \sum_{m=1}^3 \int_0^{l_m} \left(\frac{\tilde{M}_{y2} M_{yF}}{EI_y} + \kappa_z \frac{\tilde{Q}_{z2} \tilde{Q}_{zF}}{GA} \right) dx \\
 &= \left\{ \left[0 + 0 + \frac{1}{EI_1} \cdot 2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{-F \cdot l}{8} \cdot \frac{l}{4} \cdot \left(\frac{a}{2} \right) \right) \right] \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{\kappa_{z1}}{GA_1} \cdot \left(\left(\frac{F}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{a}{l} \right) + \left(-\frac{F}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{a}{l} \right) \right) \right] \right\} = -\frac{Fl^2 a}{64EI_1}
 \end{aligned}$$

Kanonske jednadžbe su jednake kao i kod simetričnog opterećenja. Uvrštenjem konstanti k zbog lakšeg daljnjeg proračunavanja dobivaju se jednadžbe:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{h^2}{6} + \frac{h^2}{3} k_1 + k_{s3} k_1 h^2 + 2h^2 k_{s1} \right) X_1 + \left(-\frac{ha}{2} k_1 - \frac{ha}{6} - 2hak_{s1} \right) X_2 + \frac{Flh}{64} &= 0 \\
 \left(-\frac{ha}{2} k_1 - \frac{ha}{6} - 2hak_{s1} \right) X_1 + \left(a^2 k_1 + \frac{1}{k_3} \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6} + 2a^2 k_{s1} \right) X_2 + \left(-\frac{Fla}{64} \right) &= 0
 \end{aligned}$$

Iz ovih jednadžbi slijedi:

$$X_1 = \frac{-3Fl(2k_3 + 9k_1 k_3 + 24k_3 k_{s1} + 2)}{32h(k_1(4k_1 + 2k_3 + 12k_{s3} + 3k_1 k_3 + 36k_1 k_3 k_{s3} + 24k_3 k_{s1} + 6k_3 k_{s3} + 72k_3 k_{s1} k_{s3}) + 24k_{s1} + 2)}$$

$$X_2 = \frac{-3Flk_3(5k_1 + 24k_{s1} + 6k_1 k_{s3} + 2)}{32h(k_1(4k_1 + 2k_3 + 12k_{s3} + 3k_1 k_3 + 36k_1 k_3 k_{s3} + 24k_3 k_{s1} + 6k_3 k_{s3} + 72k_3 k_{s1} k_{s3}) + 24k_{s1} + 2)}$$

Raspodjele poprečnih sila i momenata savijanja mogu se dobiti pomoću izraza:

$$Q_z = \tilde{Q}_{z1} X_1 + \tilde{Q}_{z2} X_2 + Q_{zF}$$

$$M_y = \tilde{M}_{y1} X_1 + \tilde{M}_{y2} X_2 + M_{yF}$$

4.2. Raspodjela momenata savijanja sa podacima za brodsko rebro

Raspodjela momenata savijanja dobivena je uvrštavanjem dolje navedenih vrijednosti u primjer sa osnovnim sustavom na slici 4.5. uz utjecaj smicanja. Korištenjem dvaju različitih osnovnih sustava dolazi se do istih vrijednosti rezultata. Provjera rezultata za dva osnovna sustava sa i bez utjecaja smicanja obavljena je pomoću programskog paketa MATLAB, a korišteni proračun nije priložen u ovaj rad. Usporedba rezultata prikazana je u tablici 4.1..

Podaci:

$$l = 32 \text{ m}; \quad h = \frac{l}{2} = 16 \text{ m}; \quad a = \frac{h}{2} = 8 \text{ m}$$

$$I_1 = 0.93 \cdot 10^{11} \text{ mm}^4; \quad I = 0.2I_1 = 0.19 \cdot 10^{11} \text{ mm}^4; \quad I_2 = \frac{1}{4}I_1 = 0.23 \cdot 10^{11} \text{ mm}^4$$

$$\kappa_z = \kappa_{z2} = \kappa_{z1} = 0.9$$

$$A_1 = 112842 \text{ mm}^2; \quad A_2 = 78016 \text{ mm}^2; \quad A = 40138 \text{ mm}^2$$

$$k_1 = \frac{h \cdot I_1}{lI} = 2.5$$

$$k_2 = \frac{al}{hI_2} = 0.4$$

$$k_3 = \frac{lEI_2}{aEI_1} = 1$$

$$k_{s1} = \frac{\kappa_{z1}EI_1}{GA_1l^2} = 0.0019$$

$$k_{s2} = \frac{\kappa_{z2}EI_2}{GA_2a^2} = 0.0109$$

$$k_{s3} = \frac{\kappa_z EI}{GAh^2} = 0.0042$$

$$F = 20000 \text{ N}$$

$$q = 320 \text{ N/mm}$$

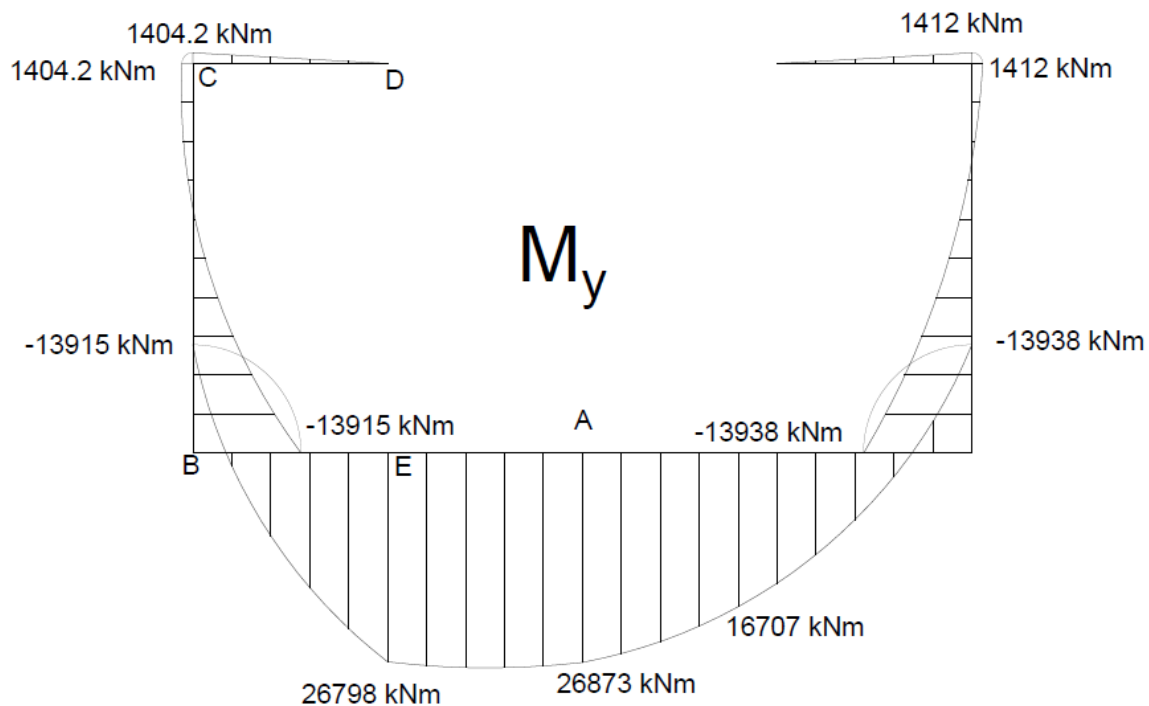
$$E = 220\,000 \text{ MPa}$$

$$E/G=0.8$$

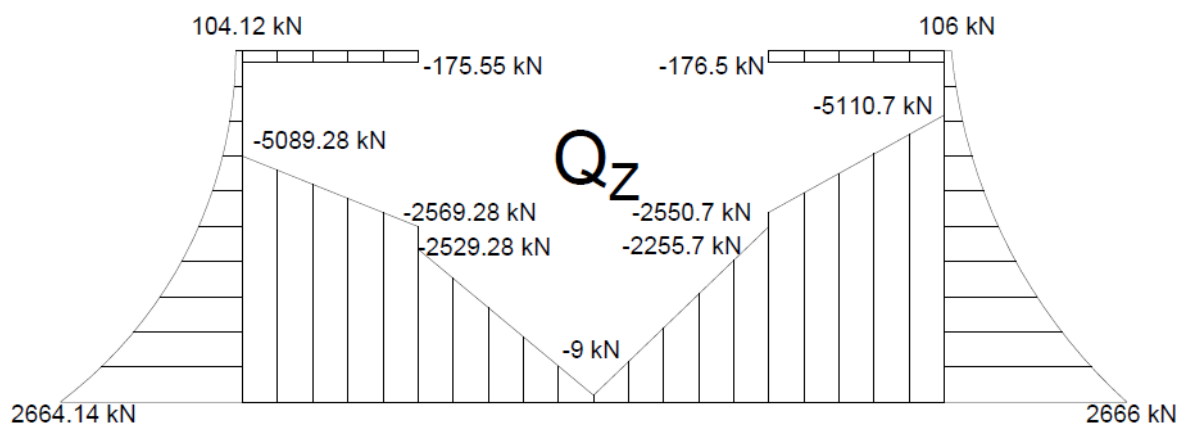
	Qz		My	
Točka	bez smicanja	sa smicanjem	bez smicanja	sa smicanjem
A	-9257,7	-9,29E+03	26683000000	26873000000
B na djelu AB	-5089266	-5089286	-14105252000	-13915579000
B na djelu BC	2689803,497	2664142,216	-14105252000	-13915579000
C na djelu BC	129783,4965	104122,2156	1624304200	1404196600
C na djelu CD	-203045,5245	-175522,0723	1624304200	1404196600
D	-203045,5245	-175522,0723	0	0
E na djelu AE	-2569265,7	-2569286,2	16368874000	16558711000
E na djelu BE	-2529266	-2529286	16368874000	16558711000

Tablica 4.1. Usporedba rezultata sa i bez utjecaja smicanja

Tablica nam prikazuje kako utjecaj smicanja ipak mijenja ishod rezultata. Na opterećenom dijelu AB ta razlika je manja dok je na neopterećenom dijelu razlika veća. Vrijednosti momenata savijanja i poprečnih sila se smanjuju u svim točkama osim u točki E, a rezultat toga je koncentrirana sila koja se javlja na tom mjestu. Time se pokazuje kako se utjecaj smicanja može i zanemariti pri proračunavanju pošto su vrijednosti veće bez njegovog utjecaja. Proračuni se bitno pojednostavljaju, a greška pri dimenzioniranju konstrukcija će biti minimalna.



Slika 4.23. Raspodjela momenata savijanja uz utjecaj smicanja



Slika 4.24. Raspodjela poprečnih sila uz utjecaj smicanja

5. ZAKLJUČAK

U ovom radu je bilo potrebno analitički riješiti ravninski zadatak metodom sila te dokazati kako dva različita pristupa zadatku daju jednaka rješenja za raspodjelu momenata savijanja. Također, dobiti raspodjelu momenata savijanja te poprečnih sila za konkretan primjer broskog rebra. Opterećenje koje se rastavilo na simetrično i antisimetrično za oba načina daje jednake vrijednosti momenata savijanja te se time dokazuje kako metoda sila uvelike pomaže pri rješavanju statički neodređenih sustava štapova. Uvidjelo se kako metoda sila ima veliku mogućnost različitog pristupa rješavanju, s time da se poštuju pravila rješavanja pomoću metode sila. Usporedbom rezultata u svim slučajevima opterećenja pomoću programskog paketa MATLAB pokazao se utjecaj smicanja na raspodjelu momenata savijanja kao i na raspodjelu poprečnih sila.

6. LITERATURA

[1] Pavazza, Radoslav: „Energijske metode – Uvod u strukturnu analizu“ Element, Zagreb, 2018.

[2] <http://www.grad.hr/nastava/gs/zb2/node26.html>

7. POPIS OZNAKA

q	kontinuirano opterećenje
F	opterećenje sila F
E	Young-ov modul elastičnosti
I_y	aksijalni moment tromosti površine u odnosu na os y
A	površina presjeka bočnog štapa
A_1	površina presjeka poprečnog štapa nosača
A_2	površina presjeka gornjeg štapa
G	modul smicanja
κ_z	faktor smicanja
l	duljina donjeg štapa
h	duljina bočnog štapa
a	duljina gornjeg štapa
M_y	moment savijanja u odnosu na os y
Q_z	poprečna sila u smjeru osi z

8. SAŽETAK

Metoda sila koristi se za određivanje raspodjele unutarnjih sila i momenata savijanja kod statički neodređenih sustava. Metoda sila polazi od određivanja stupnja statički neodređenosti nakon čega se taj sustav oslobađa tako da se dobije sustav koji je kinematički nepromjenljiv i statički određen.

Taj sustav naziva se osnovni sustav i kod njega su na mjestu uklonjenih prekobrojnih veza dodane odgovarajuće poopćene sile, takozvane dodatne nepoznanice X . U radu je prikazano rješavanje ravninskog nosača opterećen kontinuiranim opterećenjem i silom F u dva slučaja (simetrično i antisimetrično). Također određena je raspodjela bez i sa utjecajem smicanja. Zadaci su riješeni analitički i na kraju je dobivena raspodjela momenata za konkretan primjer jednog brodskog rebra.

KLJUČNE RIJEČI: metoda sila, ravninski sustav, smicanje

Title: Application of the force method to the planar frame with influence of shear

Summary: The force method is used to determine the distribution of internal forces in static indefinite systems. The force method starts from determining the degree of static indeterminacy, after which the system is released to obtain a system that is kinematically invariable and statically defined.

This system is called a basic system and at the site of removed overlapping connections the corresponding excessive force is added, the so-called additional unknowns X . In this work, the planar carrier is loaded with continuous load and force F in two cases (symmetric and antisymmetric). Also, distribution was determined without and with the shearing effect. Tasks were solved analytically and then at the end we were given division moments for an example for one ship's frame .

Keywords: force method, planar system, shear